머 리 말

위대한 령도자 **김정일**장군님께서는 다음과 같이 말씀하시였습니다.

《기초과학교육에서는 수학교육을 강화하는것이 특별히 중요합니다. 수학은 모든 자연과학의 기초의 기초입니다.》

지식경제시대인 오늘날 수학교육을 강화하는것은 기초과학을 발전시키고 모든 학생들을 높은 과학지식을 소유한 혁명인재로 키우는데서 매우 중요한 역할을 하고있습니다.

지금 우리 조국땅우에는 최첨단돌파의 불길속에서 세상을 들었다놓는 선군시대의 놀라운 기적이 창조되고있습니다.

지난 시기에는 수백, 수천년을 두고도 이룩할수 없었던 과학적진보가 오늘은 짧은 기간에 이룩되고있습니다.

이런 눈부신 발전과 미지의 과학세계를 밝혀내는 그 기초에는 바로 사람들의 뛰여난 수학적사고력과 사물현상을 옳바로 리해하고 분석평가하는 높은 지적능력이 놓여있습니다.

때문에 지능로동에 기초한 오늘의 지식경제시대는 머리가 총명한 과학기술인재들을 수많이 요구하고있습니다.

출판사에서는 소학교 학생들과 중학교 1, 2학년 학생들의 지적능력을 높여주는데 도움을 주기 위하여 이 책을 만들었습니다.

책은 2권으로 되여있는데 학생들의 수학적지능을 체계적으로 높여주고 배운 내용을 공고히 하며 그것을 응용할수 있도록 하는데 중심을 두고 서술하였습니다. 도서 《재미나게 풀어보자요》(2)에서는 보다 높은 단계의 수학적내용을 담고있습니다.

책에서는 학생들의 특성에 맞게 절마다 중점과 풀이방법, 련습을 주었으며 교과서내용외에 새로운 내용들도 학년과 나이에 맞게 지루감이 나지 않도록 편집하였습니다.

차　　례

제10장 수의 완제

제1절 완제에 관한 문제풀이

중 점

1. 수의 완제에 관한 문제의 류형 및 그 풀이방법과 기교를 능숙하게 다룰줄 알아야 합니다.
2. 문제를 정확히 읽고 따지며 수의 완제의 개념, 성질과 특징을 리용하여 문제를 풀줄 알아야 합니다.

1. 수의 완제개념

만일 어떤 수 a를 0이 아닌 수 b로 나눈 상이 옹근수이고 나머지가 없을 때 a는 b로 완제된다고 하며 $b|a$라고 씁니다. 이가운데서 a는 b의 배수이고 b는 a의 약수입니다.

2. 수의 완제성질

① 만일 수 a가 b로 완제되고 수 b가 또 수 c로 완제된다면 수 a는 c로 완제됩니다.

② 만일 a, b가 각각 c로 완제된다면 $a+b$와 $a-b$도 수 c로 완제됩니다.

③ 만일 a가 b로 완제된다면 수 a와 수 c의 적도 수 b로 완제됩니다.

④ 만일 수 a가 수 b로 완제되고 수 c가 수 d로 완제된다면 수 ac는 꼭 수 bd로 완제됩니다.

⑤ 만일 수 a가 수 b로 완제되고 수 c로도 완제된다면(수 b와 수

c는 서로 다른 수입니다.) a는 꼭 수 bc로 완제됩니다.

3. 수의 완제특징

① 2로 완제되는 수의 특징: 일의 자리의 수자가 0, 2, 4, 6, 8입니다.

② 5로 완제되는 수의 특징: 일의 자리의 수자는 0, 5입니다.

③ 3(또는 9)으로 완제되는 수의 특징: 매 자리의 수자의 합이 3(또는 9)의 배수입니다.

④ 4(또는 25)로 완제되는 수의 특징: 마지막 두자리수는 4(또는 25)의 배수입니다.

⑤ 8(또는 125)로 완제되는 수의 특징: 마지막 세자리수가 8(또는 125)의 배수입니다.

⑥ 6으로 완제되는 수의 특징: 이 수는 2의 배수일뿐아니라 또 3의 배수입니다.

⑦ 11로 완제되는 수의 특징: 홀수자리의 합과 짝수자리의 수자의 합을 던(큰데서 작은것을 덥니다.) 차는 11의 배수입니다.

⑧ 7(11 또는 13)로 완제되는 수의 특징: 마지막 세자리수와 그외 매 자리의 수로 이루어진 수를 던(큰데서 작은것을 덥니다.) 차가 0이면 이 수는 7로 완제되고 또 11(또는 13)로도 완제됩니다. 만일 차가 7(11 또는 13)의 배수이면 이 수는 7(11 또는 13)로 완제됩니다.

〔례1〕 다섯자리수 73□28이 9로 완제되면 □안의 수는 몇이겠습니까?

〔풀이〕 73□28이 9로 완제되므로 그 매 자리의 수자의 합은 9의 배수입니다. 또 7＋3＋2＋8＋□＝20＋□이므로 □안의 수는 7입니다. 그 수는 73728입니다.

답: □안의 수는 7입니다.

〔례2〕 한 제형의 면적은 1400㎡이고 높이는 50m이며 두 밑변은 다 옹근수이고 8로 완제됩니다. 두 밑변을 구하시오. 이 문제의 풀이의 개수는 몇개입니까?

〔**풀이**〕 제형의 면적과 높이를 알기때문에 제형의 두 밑변의 합을 구할수 있고 또 두 밑변이 옹근수이고 다 8로 완제된다는데 의하여 조건에 맞는 모든 수를 구할수 있습니다.

두 밑변을 각각 a와 b라고 하면

$$a+b=1400\times2\div50=56$$

$a=8$이면 $b=48$

$a=16$이면 $b=40$

$a=24$이면 $b=32$

답: 이 문제는 풀이가 3개 있습니다.

〔**례3**〕 A8919B가 66으로 완제됩니다. 이 여섯자리수는 얼마입니까?

〔**풀이**〕 66=2×3×11이므로 A8919B는 2, 3, 11로 완제됩니다. 그러므로 B는 2, 4, 6, 8, 0가운데의 한 수자이고 A+8+9+1+9+ +B의 합은 3의 배수입니다. 또 8+9+1+9=27이므로 A+B는 반드시 3의 배수입니다. 그런데 A8919B가 11로 완제되므로 (A+9+ +9)−(8+1+B)의 차도 11의 배수입니다. 그러면 (A+9+9)− −(8+1+B)=A+9−B=9+A−B이므로 9+A−B도 11의 배수입니다. 따라서 A−B는 2일수밖에 없고 A+B가 3의 배수이며 B가 0, 2, 4, 6, 8가운데의 어느 한 수이므로 A는 4이고 B는 2일수밖에 없습니다. 즉 A8919B는 489192입니다.

답: 이 여섯자리수는 489192입니다.

〔**례4**〕 학기말시험에서 4학년 1반 학생들의 수학평균성적은 90점이고 총점수는 □95□점입니다. 이 반에 학생이 모두 몇명 있습니까?

〔**풀이**〕 이 문제는 얼핏 보면 힘든것 같지만 자세히 생각해보면 다음것을 알수 있습니다. 이 반의 학생수에 평균점수를 곱하면 총점수인데 여기서 평균점수는 90점이고 90=2×5×9이므로 총점수 □95□는 꼭 2, 5, 9로 완제되여야 합니다. 따라서 총점수 □95□의 마지막수자는 꼭 0이고 □+9+5+0의 합은 꼭 9의 배수입니다. 그러므로 천의 자리의 □는 4이고 총점수는 4950입니다.

이로부터 학생수를 구할수 있습니다.

$$4950\div90=55(\text{명})$$

답: 4학년 1반에 학생이 모두 55명 있습니다.

〔례5〕 임의의 세자리수를 2번 련이어 써서 얻은 여섯자리수는 7, 11, 13으로 완제됩니다. 왜 그렇습니까?

〔풀이〕 이 세자리수를 abc(a는 1～9가운데의 옹근수이고 b, c는 0～9가운데의 옹근수입니다.)라고 하면 abc를 두번 련이어 쓴 여섯자리수는 $abcabc$이고 또 $abcabc=abc\times1000+abc=abc\times$ $\times(1000+1)=abc\times1001=abc\times7\times11\times13$입니다.

그러므로 이 여섯자리수는 7, 11, 13으로 완제됩니다.

〔례6〕 중복된 수자가 들어가지 않고 75로 완제되는 다섯자리수 3A6B5는 몇개 있습니까?

〔풀이〕 75=3×25이고 3과 25가 또 서로 소이므로 3A6B5는 3과 25로 완제됩니다. 따라서 B5는 꼭 25로 완제되고 B는 2 또는 7을 취할수 있습니다.

그런데 3+A+6+B+5의 합이 3의 배수이므로 14+A+B도 3의 배수이고 A+B=4, A+B=7, A+B=10, A+B=13, A+B=16이고 B=2, A=2, A=5, A=8(A는 11일수 없습니다.)이며 B=7, A=0, A=3, A=6, A=9입니다. 따라서 다섯자리수는 32625, 35625, 38625, 30675, 33675, 36675, 39675입니다.

여기서 32625, 35625, 33625, 33675, 36675에는 다 중복된 수자가 들어있으므로 조건을 만족시키는것은 38625, 30675, 39675 세 수뿐입니다.

답: 다섯자리수는 모두 3개 있습니다.

〔례7〕 어떤 두자리수가 그 두 수자의 합의 6배입니다. 그 두자리수를 구하시오.

〔풀이〕 이 두자리수를 ab라고 하면 $ab=(a+b)\times6$이므로 ab는 꼭 6으로 완제됩니다. 그런데 6으로 완제되는 두자리수에는 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, 96이 있고 그가운데서 54만이 두수의 합 (5+4=9)의 6배입니다.

답: 두자리수는 54입니다.

〔례8〕 열자리수 $abcdefghij$에서 서로 다른 문자는 서로 다른 수자를 표시하는데 a는 1의 배수이고 두자리수 ab는 2의 배수이며 세자리수 abc는 3의 배수이고 네자리수 $abcd$는 4의 배수이며…… 열자리수 $abcdefghij$는 10의 배수입니다. 그러면 $abcdefghij$는 얼마이겠습니까?

〔풀이〕 조건에 의하여 왼쪽으로부터 짝수자리의 수는 짝수이고 홀수자리의 수는 홀수이며 열번째 자리의 수는 0(즉 $j=0$)이고 다섯번째 자리의 수는 5(즉 $e=5$)라는것을 알수 있습니다.

그런데 처음 네자리수가 4의 배수이고 처음 여덟자리수가 8의 배수이며 홀수자리의 수가 홀수이고 짝수자리의 수가 짝수이므로 네번째 자리와 여덟번째 자리의 수는 2, 6입니다. 즉 d, h는 2, 6가운데의 어느 하나입니다. 그리고 따져보면 네번째 자리가 6(즉 $d=6$), 여덟번째 자리가 2(즉 $h=2$)일 때만이 풀이를 가집니다.

따라서 4개 수를 결정할수 있습니다.

즉 □□□65□□2□0

또 처음 세자리수가 3의 배수이고 처음 여섯자리수가 6의 배수이므로 처음 네자리로부터 여섯자리까지의 수로 이루어진 세자리수 $def=65f$도 3의 배수입니다.

그리고 f가 짝수이므로 남은 4와 8가운데서 오직 4만이 가능합니다. 즉 $f=4$입니다.

따라서 $b=8$이고 □8□654□2□0입니다.

이때 홀수 1, 3, 7, 9의 4개만 남았는데 처음 세자리수가 3의 배수이고 처음 일곱자리수가 7의 배수라는것을 고려하면 마지막에 3816547290입니다.

〔례9〕 298뒤에 세자리수를 더 쓰되 이 여섯자리의 수가 476으로 완제되게 하시오.

〔풀이〕 먼저 298000과 옹근수배가 얼마의 차가 있는가를 봅니다. $298000 \div 476 = 626 \cdots 24$, 이것은 298000이 476의 626배보다 24 더 크다는것을 알수 있습니다.

그러면 이 수는 476의 627배보다는 얼마 작겠습니까?

$476-24=452$ 즉 $24+452=476$

그러므로 298000에 452를 더하면 바로 476의 627배가 됩니다.

답: 298뒤에 452를 더 쓰면 476으로 완제됩니다.

〔례10〕 한 학생이 책에 1, 2, 3, …과 같이 번호를 매겼는데 모든 번호의 합은 100의 배수이고 또 1000보다 작습니다. 그가 매긴 번호의 최대수는 얼마입니까?

〔풀이〕 그가 매긴 번호의 최대수를 n이라고 하면 모든 번호의 합은

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{(1+n)\times n}{2}$$

또 모든 번호의 합이 100의 배수이고 1 000보다 작으므로

$$\frac{(1+n)\times n}{2}=100\times a(a\text{는 10보다 작은 자연수})$$

$$n\times(n+1)=200\times a$$

$n\times(n+1)$은 이웃한 두 자연수입니다.

$a=3$일 때 $200\times 3=24\times 25$

$$\text{즉 } n\times(n+1)=24\times 25$$

$$n=24$$

답: 그가 매긴 번호의 최대수는 24입니다.

〔례11〕 한 학교의 학생수는 세자리수이고 매개 반은 평균 36명씩입니다. 만일 전체 학생수의 백의 자리수와 열의 자리수를 바꾸어놓으면 전체 학생수는 실제보다 180명이 적습니다. 그러면 이 학교의 학생수는 제일 많아서 얼마이겠습니까?

〔풀이〕 전체 학생수를 abc라고 하면 조건에 의하여

$$abc-bac=180$$

$$100a+10b+c-(100b+10a+c)=180$$

$$100a+10b+c-100b-10a-c=180$$

$$90a-90b=180$$

$$a-b=2$$

이 학교의 학생수를 제일 많게 하려면 $a=9$, $b=7$이여야 하는데 이때 전체 학생수는 $97c$로 표시할수 있습니다.

또 매개 반 학생이 평균 36이므로 97c는 36으로 완제됩니다.

그런데 36=4×9이고 4와 9는 서로 소이므로 97c는 4로도 완제되고 9로도 완제되여야 합니다.

c=2일 때 우의 조건을 만족시키므로 이 학교의 학생수는 제일 많아서 972명입니다.

답: 이 학교의 학생수는 제일 많아서 972명입니다.

련습 10-1

1. 네자리수 841□는 2와 3으로 완제됩니다. □안에 써넣어야 할 수는 얼마입니까?

2. 789를 련속으로 써서 이루어진 수가 9로 완제되며 또 제일 작습니다. 몇번 써야 합니까?

3. 네자리수 36ab가 2, 3, 4, 5, 9로 동시에 완제됩니다. 그러면 36ab는 얼마입니까?

4. 일곱자리수 22A333A는 4로 완제되고 또 그 마지막 두 수자로 이루어진 두자리수 3A는 6의 배수입니다. 그러면 A는 얼마입니까?

5. 1994자리수 a는 9로 완제되고 그 매 자리수자의 합은 b이며 b의 매 자리수자의 합은 c입니다. 그러면 c는 얼마입니까?

6. 두 옹근수의 적이 합으로 완제되면 이 두 옹근수를 한쌍의 《좋은 수》라고 합니다. 례하면 70과 30입니다. 그러면 1, 2, …, 16의 16개 옹근수가운데는 좋은 수가 몇쌍 있습니까?

7. 3, 5, 0, 1의 네개 수가운데서 임의로 세개의 수를 선택하여 수를 만들었는데 그가운데서 3, 5로 동시에 완제되고 중복되여 들어가는 수가 없는 세자리수는 얼마입니까?

8. 어떤 수들이 있는데 매개 수는 다 11로 완제되고 각 자리의 수자의 합은 20입니다. 이런 수들가운데서 제일 작은 수는 얼마입니까?

9. 어떤 세자리에서 그 수의 매 자리의 수자의 합을 던 차는 세자리수이며 46x입니다. x는 얼마입니까?

10. 창고에 질량이 각각 15, 16, 18, 19, 20, 31㎏인 화물 6상자가 있는데 두사람이 그중의 5상자를 가져갔습니다. 한사람이 가져간 화물의 질량이 다른 사람이 가져간 화물의 2배일 때 창고에 남은 화물 한상자의 질량은 얼마이겠습니까?

11. 세자리수의 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리의 수가 각각 5, a, b입니다. 이 수를 련속 99번 써서 다음과 같은 수를 얻습니다.

$$\underbrace{5ab5ab\cdots5ab}_{5ab\text{가 }99\text{개}}$$

우의 얻어진 수가 91로 완제된다면 세자리수 $5ab$는 얼마입니까?

12. 임의의 두 수의 합이 언제나 그것들의 차로 완제되는 서로 다른 자연수를 4개 쓰시오. 만일 이 네 수가운데서 제일 큰 수와 제일 작은 수의 합이 될수록 작다면 이 네 수의 중간의 두 수의 합은 얼마입니까?

13. 두 수의 합은 64이고 두 수의 적으로 4875를 완제할수 있다면 이 두 수의 차는 얼마입니까?

14. 왼쪽으로부터 오른쪽으로 번호를 차례로 매긴 1991명의 학생들이 한줄에 섰습니다. 왼쪽으로부터 오른쪽으로 1부터 11까지 번호를 부릅니다. 11을 부른 학생은 그자리에 서있고 다른 학생들은 줄에서 나와섭니다. 그다음 남은 학생들이 다시 왼쪽으로부터 오른쪽으로 1부터 11까지의 번호를 부릅니다. 11을 부른 학생은 그자리에 서있고 다른 학생들은 줄에서 나와섭니다. 남은 학생들은 다시 왼쪽으로부터 오른쪽으로 1부터 11까지 번호를 부릅니다. 11을 부른 학생은 그자리에 서있고 다른 학생들은 줄에서 나와섭니다. 그러면 맨 마지막에 남은 학생가운데서 왼쪽으로부터 첫번째 사람의 처음 번호는 얼마이겠습니까?

15. 5000보다 작은 자연수중에서 11로 완제되고 또 매 수의 자리의 수자의 합이 13인 수는 모두 몇개입니까?

16. 한 여섯자리수는 9와 11로 완제됩니다. 이 여섯자리수의 첫

자리와 마지막자리 두 수자를 지워버린 중간의 네개 수자는 1997입니다. 이 여섯자리수는 얼마입니까?

제2절 씨수, 합성수와 씨인수분해

씨수와 합성수는 다 수론에서 기본적이면서도 동시에 가장 중요한 개념의 하나로서 흥미있는 문제들이 많습니다.

씨인수분해는 옹근수를 연구하는 중요한 방법으로서 수학문제풀이에서 널리 응용됩니다.

중 점

1. 씨수, 합성수의 정의를 정확히 습득하며 합성수를 씨인수로 분해할줄 알아야 합니다.
2. 합성수를 씨인수의 적의 형태로 표시하고 그와 관계되는 지식을 활용하여 수학문제를 풀줄 알아야 합니다.

〔**례1**〕 1～100의 100개 자연수가운데서 어느 수가 씨수입니까?

〔**풀이**〕 1～100의 100개 자연수로 다음과 같은 표를 만듭니다.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70

71 72 73 74 75 76 77 78 79 80
81 82 83 84 85 86 87 88 89 90
91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

그다음 2를 남기고 2의 배수를 지워버리며 3을 남기고 3의 배수를 지워버리며 5를 남기고 5의 배수를 지워버리며 7을 남기고 7의 배수를 지워버립니다. (이 과정을 채로 치는 방법이라고 합니다.) 이때 표에는 아직도 26개 수가 남는데 1을 제외한 나머지 25개 수는 다 씨수입니다. 여기서 어떤 학생들은 채로 치는 방법으로 100까지에서의 씨수를 찾을 때 왜 7까지 끝내고 11 등 씨수로는 계속해내려가지 않는가를 물을수 있습니다. 아래에서 그 원리를 보기로 합시다.

100을 초과하지 않는 11의 배수는 꼭

$$11\times\text{어떤 수}\leqq 100$$

$$\text{어떤 수}\leqq\frac{100}{11}=9.99\cdots\cdots$$

를 만족시킵니다.

그리하여 어떤 수는 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9를 취할수 있고 따라서 11×어떤 수는 2, 3, 5, 7의 배수입니다.

그런데 이런 수들은 2, 3, 5, 7의 배수를 지워버릴 때 이미 지워버렸습니다. 그러므로 2, 3, 5, 7의 배수만 지워버리면 100까지에서의 모든 씨수를 구할수 있습니다.

※ 일반적으로 어떤 수가 씨수인가를 판단할 때에는 먼저 그 수가 어느 련속된 두 씨수의 2제곱수사이에 있는가를 보고(11과 13은 련속된 두 씨수이고 23과 29도 련속된 두 씨수입니다.) 다음 련속된 두 씨수중 작은 씨수가 될 때까지 2, 3, 5, 7 등 씨수로 나누어봅니다. 이때 여전히 완제되지 않으면 그 수는 꼭 씨수입니다.

례를 들어 523이 씨수인가를 판단하기로 합시다. $19^2<523<23^2$ (19와 23은 련속된 씨수입니다.)이므로 2, 3, 5, 7, …, 19로 나누어보는데 이때 어떤 수로도 완제되지 않습니다. 그러므로 523은

꼭 씨수입니다.

〔례2〕 1～100까지의 자연수가운데 2의 배수가 몇개 있습니니까? 3의 배수는? 5의 배수는?……

〔**풀이**〕수 2의 배수식을 작은것으로부터 쓰면

$$1\times2,\ 2\times2,\ 3\times2,\ 4\times2,\ \cdots,\ 49\times2,\ 50\times2$$

따라서 100까지에서의 2의 배수는 $\frac{100}{2}=50$(개)입니다.

3의 배수를 작은것으로부터 쓰면

$$1\times3,\ 2\times3,\ 3\times3,\ 4\times3,\ \cdots,\ 32\times3,\ 33\times3$$

100까지에서의 3의 배수는 33개이고 $\frac{100}{3}$을 분수로 고쳤을 때의 옹근수부분도 33입니다. 그러므로 100까지에서의 3의 배수의 개수를 $\left[\frac{100}{3}\right]$으로 표시합니다. 여기서 $\left[\frac{100}{3}\right]$은 $\frac{100}{3}$의 옹근수부분을 표시합니다.

그러므로 100까지에서 3의 배수는 $\left[\frac{100}{3}\right]=33$(개)입니다.

5의 배수를 작은것으로부터 쓰면

$$1\times5,\ 2\times5,\ 3\times5,\ \cdots,\ 19\times5,\ 20\times5$$

따라서 100까지에서 5의 배수는 $\left[\frac{100}{5}\right]=20$(개) 있습니다.

100까지에서 7의 배수는 $\left[\frac{100}{7}\right]=14$(개) 있고 11의 배수는 $\left[\frac{100}{11}\right]=9$(개) 있으며 13의 배수는 $\left[\frac{100}{13}\right]=7$(개)… 있습니다.

여기에서 기본은 일반적으로 1부터 n(n은 자연수)까지의 자연수에서 a($a \leqq n$, 1부터 n까지의 자연수)의 배수의 개수는 $\left[\frac{n}{a}\right]$이라는것입니다.

례를 들면 1～1 000의 1000개 자연수에서 15의 배수의 개수는 $\left[\frac{1000}{15}\right]=66$개입니다.

〔례3〕 어떤 수는 5개의 2, 3개의 3, 2개의 5, 1개의 7을 련이어 곱한 적으로 되여있습니다. 이 수의 두자리약수중에서 제일 큰것은 얼마입니까?

〔풀이〕 이 수는 $2^5 \times 3^3 \times 5^2 \times 7$인데 제일 큰 두자리수는 $99=3^2 \times 11$이지만 이 수의 약수가 아닙니다. 또 $98=2 \times 7^2$도 이 수의 약수가 아니고 $96=2^5 \times 3$은 이 수의 약수입니다. 그러므로 이 수의 두자리약수중 제일 큰 약수는 96입니다.

답: 이 수의 두자리약수중 제일 큰 약수는 96입니다.

〔례4〕 오른쪽 6개 동그라미안에 각각 6개 씨수를 써넣었는데 그것들의 합은 20이고 매개 작은 3각형의 정점에서의 수의 합은 서로 같습니다. 이 6개 씨수의 적은 얼마입니까?(그림 1)

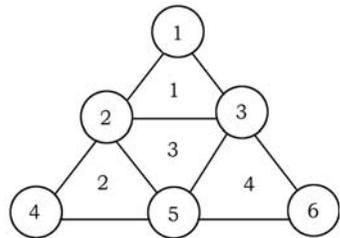



그림 1

〔풀이〕 작은 3각형 4개에 1, 2, 3, 4로 번호를 달고 4개의 작은 3각형의 6개 정점에도 번호 ①, ②, ③, ④, ⑤, ⑥을 답니다. 그러면 작은 3각형 1에서의 세 정점 ①, ②, ③의 수의 합과 작은 3각형 3에서의 세 정점 ②, ③, ⑤의 수의 합이 같으므로 정점 ①에서의 수와 정점 ⑤에서의 수는 같습니다.

마찬가지로 정점 ④에서의 수와 정점 ③에서의 수가 같고 정점 ⑥에서의 수와 정점 ②에서의 수가 같습니다. 그러므로 정점 ①, ④, ⑥에서의 세 수의 합과 정점 ②, ③, ⑤에서의 세 수의 합도 같습니다. 또 6개 씨수의 합이 20이므로 세 씨수의 합은

20÷2=10입니다. 따라서 세 씨수는 2, 3, 5뿐이고 6개 씨수의 적은 $(2\times3\times5)\times(2\times3\times5)=900$입니다.

답: 6개 씨수의 적은 900입니다.

〔례5〕 련속된 네 자연수의 적이 360이면 그중 제일 큰 수는 얼마입니까?

〔풀이〕 360을 씨인수분해하고 이 씨수들을 네개의 련속된 자연수가 되도록 네 조로 나눕니다.

$$\begin{aligned}360&=2\times2\times2\times3\times3\times5\\&=3\times(2\times2)\times5\times(2\times3)\\&=3\times4\times5\times6\end{aligned}$$

그중 제일 큰 수는 6입니다.

답: 그중 제일 큰 수는 6입니다.

〔례6〕 20을 몇개의 합성수의 합으로 표시할 때 이런 합성수들의 적가운데서 제일 큰것은 얼마입니까?

〔풀이〕 20을 몇개의 합성수의 합으로 나누고 그 합성수들의 적이 제일 크게 해야 합니다. 그런데 몇개 수의 합이 일정하면 그 몇개 수가 같을 때 적이 제일 큽니다. 따라서 20을 4+4+4+4+4로 나누어야 하는데 이때 그 적은 $4\times4\times4\times4\times4=1024$입니다.

답: 합성수들의 적가운데서 제일 큰것은 1024입니다.

〔례7〕 21, 30, 65, 126, 143, 169, 275를 두조로 나누되 그 두조의 수의 적이 같게 하시오.

〔풀이〕 7개 수를 그 적이 같게 두조로 나누려면 먼저 7개 수를 인수분해하고 두조의 수의 씨인수가 같게 하여야 두조의 수의 적이 같게 됩니다.

$21=3\times7$, $30=2\times3\times5$, $65=5\times13$, $126=2\times3^2\times7$

$143=11\times13$, $169=13\times13$, $275=5^2\times11$

7개 수의 모든 씨인수는 2가 2개, 3이 4개, 5가 4개, 7이 2개, 11이 2개, 13이 4개입니다.

그러므로 매개 조의 수에는 2가 1개, 3이 2개, 5가 2개, 7이 1개, 11이 1개, 13이 2개 들어있어야 합니다.

126에는 2가 1개, 7이 1개, 3이 2개 들어있고 169에는 13이 2개 들어있으며 275에는 5가 2개, 11이 1개 들어있으므로 이 세 수를 한조로 하고 나머지 4개 수 30, 65, 21, 143을 한조로 합니다.

답: 21, 30, 65, 143의 적과 126, 169, 275의 적이 같습니다.

〔례8〕 상점에서 원주필을 한대에 40전도 되지 않는 값으로 팔았는데 판 값이 모두 31.93원이였습니다. 원주필은 모두 몇대였겠습니까?

〔풀이〕 31.93원＝3193전

이 3193을 씨인수분해하면 $3193=31\times103$

이로부터 원주필 한대의 값은 0.31원이고 모두 103대라는것을 알수 있습니다.

〔례9〕 천의 자리의 수자가 1인 네자리수가 있는데 그 수를 서로 다른 4개의 씨수로 나누면 나머지는 1입니다. 이런 조건을 만족시키는 제일 큰 짝수는 얼마입니까?

〔풀이〕 조건에 의하여 천의 자리수자가 1인 네자리수를 큰것으로부터 차례로 검사해봅니다. 천의 자리수자가 1인 제일 큰 짝수는 1998인데 이 수를 서로 다른 4개의 씨인수로 나눌 때 나머지가 다 1이 되려면 1998－1의 차가 서로 다른 네개의 씨인수로 다 완제되여야 합니다. 그런데 1998－1＝1997은 씨수이므로 1998은 조건에 맞지 않습니다. 그다음은 1996인데 여기서 $1996-1=1995=$ $=3\times5\times7\times19$이고 3, 5, 7, 19가 4개의 서로 다른 씨수입니다. 그러므로 조건을 만족시키는 최대의 짝수는 1996입니다.

답: 조건을 만족시키는 제일 큰 짝수는 1996입니다.

〔례10〕 계산하지 말고 $48\times925\times38\times435$의 적의 끝에서부터 몇자리가 0인가를 밝히시오.

〔풀이〕 수들가운데서 2×5가 한조씩 있을 때마다 적의 끝자리에는 0이 한개씩 있게 됩니다. 그러므로 이 수들을 씨인수분해하면 $48=2^4\times3$, $925=5^2\times37$, $38=2\times19$, $435=5\times87$로서 모두 2가 5개, 5가 3개 있습니다. 그러므로 적의 끝의 세자리수가 련속된 0입니다.

답: 적의 끝의 세자리가 련속된 0입니다.

〔례11〕 서로 잇닿아있는 두 자연수의 적이 1980입니다. 그 두 수를 구하시오.

〔풀이〕 $1980=2\times2\times3\times3\times5\times11$이고 $2\times2\times11=44$, $3\times3\times\times5=45$입니다. 즉 44와 45는 서로 잇닿아있는 두 자연수이고 그 적은 1980입니다.

답: 서로 잇닿아있는 두 자연수는 44와 45입니다.

〔례12〕 소학교 4학년 학생이 수학경연에 참가하였는데 그의 등수, 나이, 점수의 적이 2910입니다. 이 학생은 몇등을 하였습니까? 성적은 몇점입니까?

〔풀이〕 2910을 씨인수분해한 다음 이런 씨수들을 세조로 나누어 각각 등수, 나이, 성적을 대표하게 합니다.

$2910=2\times3\times5\times97=3\times(2\times5)\times97$(4학년 학생의 나이는 10살 전후로서 3×5일수 없습니다.)

이 학생의 등수는 3등이고 97점을 받았습니다.

답: 이 학생의 등수는 3등이고 97점을 받았습니다.

〔례13〕 72의 약수는 몇개입니까? 144의 약수는 몇개입니까? 504의 약수는 몇개입니까?

〔풀이〕 세 수를 씨인수분해합니다.

$72=2^3\times3^2$, 따라서 72의 약수는 1, 72; 2, 36; 3, 24; 4, 18; 6, 12; 8, 9 모두 12개입니다.

그런데 72의 씨인수에는 2가 3개, 3이 2개 있고 $(3+1)\times(2+1)==12$입니다.

$504=2^3\times3^2\times7$, 따라서 504의 약수는 1, 504; 2, 252; 3, 168; 4, 126; 6, 84; 7, 72; 8, 63; 9, 56; 12, 42; 14, 36; 18, 28; 21, 24 모두 24개입니다.

또한 504의 씨인수에는 2가 3개, 3이 2개, 7이 1개 있고 $(3+1)\times\times(2+1)\times(1+1)=24$입니다.

$144=2^4\times3^2$, 따라서 144의 약수는 1, 144; 2, 72; 3, 48; 4, 36; 6, 24; 8, 18; 9, 16; 12, 12 모두 15개입니다. 또한 144의 씨인수

에는 2가 4개, 3이 2개 있고 $(4+1)\times(2+1)=15$입니다.

〔례14〕 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29가 각각 씌여져있는 열장의 종이쪽지들에서 한장을 꺼내고 수자를 기억한 다음 도로 넣고 섞습니다. …이렇게 4번 진행한 다음 네 수의 적을 P라고 합니다. 그러면 136, 198, 455, 1925, 2001가운데서 P로 될수 없는것은 어느것입니까?

〔풀이〕 열장의 종이쪽지 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29는 다 씨수입니다. 그러므로 그중에서 꺼낸 종이쪽지의 수의 적은 씨수 4개의 적입니다.

$136=2\times2\times2\times17$, $198=2\times3\times3\times11$, $1925=5\times5\times7\times11$이므로 이 씨인수들은 다 10장의 종이쪽지가운데 있습니다.

$$455=5\times7\times13,\quad 2001=3\times23\times29$$

따라서 455, 2001은 3개의 씨수의 적으로만 분해할수 있고 네 수의 적 P로는 될수 없습니다.

답: 5개의 수에서 P로 될수 없는것은 455와 2001입니다.

련습 10-2

1. 서로 다른 8개의 약수를 가지고있는 자연수에서 제일 작은것은 얼마입니까?

2. 두자리수를 가진 수가 2개 있는데 그 적은 3927입니다. 그 두 수의 합은 얼마입니까?

3. 200의 모든 약수의 합은 얼마입니까?

4. 네명의 어린이의 나이는 련속된 네 자연수입니다. 이 어린이들의 나이의 적이 360일 때 그중 나이가 제일 많은 어린이의 나이는 몇살입니까?

5. 1988의 약수의 개수는 몇개입니까?

6. 련속된 자연수 5개는 다 합성수입니다. 이 련속된 자연수 5개의 합가운데서 제일 작은것은 얼마입니까?

7. 240의 모든 약수의 합은 얼마입니까?

8. $14\times75\times39\times143$과 $33\times30\times35\times169$의 적이 같은지, 같지 않은지 말해보시오.

9. 련속된 자연수 9개 가운데는 씨수가 제일 많아서 몇개 있습니까?

10. 어느 한 수가 2가 6개, 3이 3개, 5가 1개, 7 한개를 련이어 곱한 적으로 되였는데 이 수의 많은 약수들은 두자리수로 되였습니다. 이런 두자리약수가운데서 제일 큰것은 얼마입니까?

11. 한가지 새로운 계산 《*》을 $a*b=a(a+1)\cdots(a+b-1)$로 규정합니다. $(x*3)*4=421200$이라면 x는 몇입니까?

12. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9가 각각 씌여있는 9장의 카드를 ㄱ, ㄴ, ㄷ 세사람이 각각 3장씩 가졌습니다. ㄱ가 《나의 3장 카드의 수의 적은 48입니다.》라고 말하고 ㄴ는 《나의 3장 카드의 수의 합은 15입니다.》라고 말하였으며 마지막으로 ㄷ가 《나의 3장 카드의 수의 적은 63입니다.》라고 말하였습니다. 그들은 각각 어느 카드를 가졌겠습니까?

13. 자연수 N은 두자리수이고 씨수입니다. 또 N의 일의 자리의 수자와 열의 자리의 수자는 모두 씨수입니다. 이런 자연수는 몇개 있습니까?

14. ㄱ, ㄴ 두사람의 나이합은 두자리수입니다. 이 두자리수는 씨수이고 이 씨수의 수자의 합은 13입니다. ㄱ는 ㄴ보다 13살 많습니다. 그러면 ㄱ, ㄴ 두사람은 각각 몇살입니까?

15. 10개의 수 21, 22, 34, 39, 44, 45, 65, 76, 133, 153을 매개 조에 5개 수씩 있게 두개 조로 묶었습니다. 한조의 5개 수의 적은 다른 한개 조의 5개 수의 적과 같습니다. 두조의 5개 수는 각각 어떤것입니까?

16. 세 씨수의 적이 바로 그 세 수의 합의 7배입니다. 그 세 수는 각각 얼마입니까?

17. 17을 몇개의 자연수의 합으로 나누고 그 자연수들의 적을 구합니다. 얻어진 적을 될수록 크게 하려면 어떻게 나누어야 합니까? 그 적은 얼마입니까?

18. 어느날 두 선생님은 중학교 5학년 학생들로 나무심기를 조직하였습니다. 전체 학생을 똑같게 5개 조로 나누었습니다. 선생님들과 학생들이 심은 나무량은 같습니다. 나무는 모두 893그루 심었습니다. 나무를 심으러 간 학생이 모두 몇명입니까? 매 사람이 나무를 몇그루 심었습니까?

제3절 최대공통약수와 최소공통배수

중 점

1. 최대공통약수와 최소공통배수를 구하는 방법을 잘 알아야 합니다.

2. 문제를 정확히 읽고 풀이방법을 결정하며 깐깐히 계산하는 습관을 키워야 합니다.

〔례1〕 길이가 120㎝이고 너비가 80㎝인 철판을 면적이 같은 제일 큰 바른4각형이 되게 자르되 나머지가 없게 하려고 합니다. 몇개로 자를수 있습니까?

〔**풀이**〕 이러한 바른4각형의 변의 길이는 120과 80의 최대공통약수여야 합니다.(이렇게 하여야만 나머지가 없다는것을 증명할수 있습니다.) 이 바른4각형의 변의 길이로 120과 80을 각각 나누면 직4각형의 길이와 너비가 각각 몇쪼각으로 잘라지는가를 알수 있습니다. 그 두 수를 곱하면 그 적이 바로 잘라낸 바른4각형의 쪼각수입니다.

$(120, 80)=40$

$120 \div 40=3, 80 \div 40=2$

$3 \times 2=6$(쪼각)

답: 이런 바른4각형을 6쪼각으로 자를수 있습니다.

〔례2〕 한 수로 3705를 나누니 나머지가 9였고 4759를 나누니 나머지가 13이였으며 5079를 나누니 3이 모자랐습니다. 그 수는 제일 커서 몇입니까?

〔풀이〕 3705－9, 4759－13, 5079＋3은 다 한 수로 완제됩니다. 그러므로 그 수는 3705－9, 4759－13, 5079＋3의 최대공통약수입니다.

$$3705-9=3696,\ 4759-13=4746,\ 5079+3=5082$$

$$(3696,\ 4746,\ 5082)=42$$

답: 그 수는 제일 커서 42입니다.

〔례3〕 길이가 132㎝이고 너비가 60㎝이며 두께가 36㎝인 목재가 있는데 지금 이 목재를 크기가 같고 또 될수록 큰 립방체모양의 나무쪼박으로 자르되 나머지가 없게 하려고 합니다. 모두 몇 쪼박으로 자를수 있습니까?

〔풀이〕 이러한 바른6면체로 자르려면 통의 길이는 반드시 목재의 길이, 너비, 두께의 최대공통약수이여야 합니다.

$$(132,\ 60,\ 36)=12$$

잘라서 얻은 쪼박수는

$$(132\div12)\times(60\div12)\times(36\div12)=$$
$$=11\times5\times3=$$
$$=165(\text{쪼박})$$

답: 165쪼박으로 자를수 있습니다.

〔례4〕 도로 AC가 있는데 AC사이의 B곳에 굽인돌이가 있으며 AB의 길이는 630m이고 BC의 길이는 560m입니다. 지금 이 도로의 한쪽켠에 같은 거리로 가로등을 설치하려고 하는데 A, B, C 세 점에도 각각 한개씩 설치해야 한다고 합니다. 이 도로에 가장 적어서 가로등을 모두 몇개 설치할수 있습니까?

〔풀이〕 가로등의 개수를 제일 적게 하려면 가로등사이의 거리를 제일 크게 해야 합니다. 가로등사이의 거리는 바로 630과 560의 최대공통약수입니다.

$$(630,\ 560)=70$$

A, B사이의 가로등의 개수: $630 \div 70 + 1 = 10$(개)

B, C사이의 가로등의 개수: $560 \div 70 = 8$(개)

A, C사이의 가로등의 개수: $10 + 8 = 18$(개)

답: 이 도로에 가장 적어서 가로등을 18개
설치할수 있습니다.

〔례5〕 2836, 4582, 5164, 6522 이 네 자연수를 같은 자연수로 나누면 나머지가 다 같고 또 다 두자리수입니다. 나누는수와 나머지의 합은 얼마입니까?

〔풀이〕 나누는수를 A라고 하면 2836, 4582, 5164, 6522를 A로 나눈 나머지가 같으므로 이 네 자연수의 차는 다 A로 완제됩니다.

또 나머지가 두자리수이므로 나누는수 A는 적어도 두자리수입니다.

$4582 - 2836 = 1746$, $5164 - 4582 = 582$, $6522 - 5164 = 1358$

$(1746, 582, 1358) = 194$

그러므로 나누는수 A는 10보다 큰 194의 약수입니다. 그런데 10보다 큰 194의 약수는 97과 194 두개뿐입니다.

만일 $A = 194$라고 하면 $2836 \div 194 = 14 \cdots 120$, 나머지 120이 두자리수가 아니므로 조건에 맞지 않습니다.

$A = 97$이라고 하고 검산하여보면 나머지는 23입니다.

그러므로 나누는수+나머지$= 97 + 23 = 120$

답: 나누는수와 나머지의 합은 120입니다.

〔례6〕 책이 300～400권사이에 있는데 한번에 12권씩 포장하면 11권이 남고 한번에 18권씩 포장하면 1권이 모자라며 한번에 15권씩 포장하면 7개 꾸레미에는 각각 2권씩 더 많게 됩니다. 책은 모두 몇권입니까?

〔풀이〕 한번에 12권씩 포장하면 11권 남는다는것은 한꾸레미를 더 포장하면 1권 모자란다는것을 말하며 한꾸레미에 15권씩 포장하면 7개 꾸레미에 각각 2권씩 더 많게 된다는것은 $2 \times 7 = 14$(권) 더 많아지므로 역시 한꾸레미를 더 포장하면 1권이 모자란다는

것을 말합니다.

그러므로 책의 권수는 꼭 300부터 400사이에서 12, 15, 18의 공통배수보다 1이 작은 수입니다. 그런데 〔12, 15, 18〕=180이므로 그 수들의 공통배수는 180, 360, 540, …이며 조건에 맞는것은 360입니다.

따라서 책은 360－1＝359(권)입니다.

답: 책은 359권입니다.

〔례7〕 5, 10, 15, …, 5995, 6000과 같이 수 1200개가 있습니다. 그중 12의 배수는 몇개입니까?

〔풀이〕 이 수들은 다 5의 배수이고 그가운데서 12의 배수를 찾으려면 5와 12의 공통배수를 찾아야 합니다. 또한 5와 12의 최소공통배수는 60이고 공통배수는 60×1, 60×2, 60×3…입니다. 따라서 5의 배수중 12의 배수는 60의 배수입니다.

그러므로 6000을 넘지 않는 60의 배수는 모두

$$\left[\frac{6000}{60}\right]=100(\text{개})$$ 있습니다.

답: 이 수가운데는 12의 배수가 100개 있습니다.

〔례8〕 얼마간의 책을 세개 학급에 나눠주는데 매 학생에게 6권씩 나눠줄수 있습니다. 만일 1반에만 나눠주면 한 학생에게 10권씩 나눠줄수 있고 3반에만 나눠주면 매 학생에게 21권씩 나눠줄수 있습니다. 2반의 학생수가 10명에 가깝다면 매개 학급 학생수는 각각 몇명입니까?

〔풀이〕 만일 책이 모두 몇권인가를 구할수 있다면 1반에 몇명 있고 3반에 몇명 있는가를 구할수 있습니다. 만일 세개 반에 모두 몇명이 있는가를 구할수 있으면 2반에 몇명이 있는가도 구할수 있습니다. 또 《한 학생에게 6권씩 나눠줄수 있다.》, 《한 학생에게 10권씩 나눠줄수 있다.》, 《한 학생에게 21권씩 나눠줄수 있다.》는데 의하여 책의 권수는 꼭 6, 10, 21의 공통배수입니다. 6, 10, 21의 최소공통배수가 210이므로 책의 권수는 210, 420, 630, 840……일수 있습니다.

만일 책이 210권 있다면 학생은 모두 210÷6=35(명)이고 1반은 210÷10=21(명), 3반은 210÷21=10(명), 2반은 35−21−10==4(명)입니다. 이것은 10명에 가깝지 않으므로 버립니다.

만일 책이 420권 있다면 학생은 모두 420÷6=70(명)이고 1반은 420÷10=42(명), 3반은 420÷21=20(명), 2반은 72−42−20==8(명)입니다. 이것은 10명에 가깝습니다.

책이 모두 630권 있다면 학생은 모두 630÷6=105(명)이고 1반은 630÷10=63(명), 3반은 630÷21=30(명), 2반은 105−63−30==12(명)입니다. 이것은 10명을 초과하므로 버립니다.

그러므로 책은 모두 420권 있고 학생은 1반에 42명, 2반에 8명, 3반에 20명 있습니다.

〔례9〕 어떤 수를 3으로 나누면 나머지가 2이고 5로 나누면 나머지가 3이며 7로 나누면 나머지가 2입니다. 제일 작은 수는 얼마입니까?

〔풀이〕 (1) 구하려는 수는 3개 조건을 만족시켜야 합니다.

① 3으로 나누면 2가 남는다는것. ② 5로 나누면 3이 남는다는것. ③ 7로 나누면 2가 남는다는것.

첫째 체계: 7로 나누면 2가 남는 수가운데서 5로 나누면 3이 남는 수를 찾습니다. 7로 나누면 2가 남는 수는 9, 16, 23, 30, 37…인데 그중 23을 5로 나누면 3이 남습니다.

둘째 체계: 7과 5의 공통배수에 23을 더한 수가운데서 3으로 나누면 2가 남는 수를 찾습니다. 7과 5의 최소공통배수는 35이고 7과 5의 공통배수에 23을 더한 수는 58, 93, 128, 163……(이런 수들은 5로 나누면 3이 남고 7로 나누면 2가 남습니다.)인데 그중 128이 3으로 나누면 2가 남습니다.

따라서 128은 3으로 나누면 2가 남고 5로 나누면 3이 남으며 7로 나누면 2가 남은 수입니다.

만일 제일 작은 수가 얼마인가를 구하려면 128에서 3, 5, 7의 최소공통배수 105를 덜어 23을 얻어야 합니다.

그러므로 조건에 맞는 제일 작은 수는 23입니다.

(2) 우의 문제는 다음과 같이 풀수도 있습니다.

첫째 체계: 5와 7의 공통배수에서 3으로 나누면 나머지가 2인 수 35를 찾습니다.

둘째 체계: 3과 7의 공통배수에서 5로 나누면 나머지가 3인 수 63을 찾습니다.

셋째 체계: 3과 5의 공통배수에서 7로 나누면 나머지가 2인 수 30을 찾습니다.

넷째 체계: 우의 세 수를 더하면 35+63+30=128인데 128은 세개 조건을 만족시키는 수입니다. 이제 세개 조건을 만족시키는 제일 작은 수를 찾으려면 128에서 3, 5, 7의 최소공통배수 105를 덜어야 합니다. 128−105=23이므로 23은 세개 조건을 만족시키는 제일 작은 수입니다. 또 그 수가 어떤 두 수사이에 있으면 128에 조건을 만족시킬 때까지 105의 배수를 더해야 합니다.

례를 들어 그 수가 300～400사이에 있다면 그 수는 128+105××2=338입니다.

답: 제일 작은 수는 23입니다.

〔례10〕 두 수의 최대공통약수는 6이고 최소공통배수는 144입니다. 두 수는 각각 얼마입니까? 이런 수가 각각 몇개 있습니까?

〔풀이〕 먼저 두 수의 최대공통약수와 최소공통배수사이의 관계를 연구합시다. 60, 90을 례로 하면

$$(60,\ 90)=30,\quad [60,\ 90]=180$$

$$180\div 30=6=2\times 3,\quad 60\div 30=2,\quad 90\div 30=3$$

이로부터 두 수의 최소공통배수를 그 두 수의 최대공통약수로 나눈 상은 그 두 수를 그 두 수의 최대공통약수로 각각 나눈 두 상의 적이라는것을 알수 있습니다.

그러므로 두 수의 최소공통배수 144를 그 두 수의 최대공통약수 6으로 나누면 144÷6=24를 얻는데 여기서 24는 두 수를 그것들의 최대공통약수 6으로 각각 나누었을 때 얻어진 2개 상의 적입니다. (여기서 2개 상은 꼭 서로 소되는 수인데 그렇지 않으면 그것들의 최대공통약수는 6이 아닙니다.) 즉 24의 서로 소되는 수는 1과

24, 3과 8이 있습니다. (2와 12의 적도 24이지만 서로 소되는 수가 아니므로 고려하지 않습니다.)

그러므로 두 수는

$$1\times6=6,\ \ 24\times6=144,\ \ 3\times6=18,\ \ 8\times6=48$$

조건에 맞는 수는 2조 있습니다.

답: 그 두 수는 6과 144 또는 18과 48의 두개 조가 있습니다.

〔례11〕 ㄱ, ㄴ, ㄷ 세사람이 도서관에 가서 책을 보는데 ㄱ는 6일에 한번씩 가고 ㄴ는 8일에 한번씩 가며 ㄷ는 9일에 한번씩 갑니다. 그들 세사람이 3월 5일에 도서관에서 만났다면 다음번에 도서관에서 만날 날자는 몇월 몇일입니까?

〔풀이〕 〔6, 8, 9〕=72 즉 ㄱ, ㄴ, ㄷ는 72일후에 다시 만나게 됩니다. 3월 5일에 그들 세사람이 도서관에서 만났으므로 3월 6일부터 72번째 날은 바로 5월 16일입니다. 즉 다음번에 만날 날은 5월 16일입니다.

답: 도서관에서 만날 날은 5월 16일입니다.

〔례12〕 어느 한 공장에서 남자 9명과 녀자 6명으로 4월 20일부터 매일 남녀 각각 1명씩 짝을 무어 야간순찰을 하게 하려고 합니다. 야간순찰일지를 보면 남, 녀는 다 고정된 순서번호가 있는데 번호가 작은것으로부터 한차례한차례씩 순환하도록 되여있습니다. 례를 들면 4월 20일에는 《남1번》과 《녀1번》이 짝이 되고 그다음부터는 《남2번》과 《녀2번》, 《남3번》과 《녀3번》, …, 《남7번》과 《녀1번》, 《남8번》과 《녀2번》…이 각각 짝이 됩니다.

(1) 5월 26일에는 어느 두 남녀가 짝이 되겠습니까?

(2) 야간순찰일지에 따르면 《남1번》과 《녀5번》이 같은 날 순찰에 나갈수 있습니까? 왜 그렇습니까?

(3) 5월 8일부터 공장에 새로 들어온 녀동무(《녀7번》)가 《녀6번》의 뒤를 이어 야간순찰에 참가한다고 합니다. 그러면 《남1번》과 《녀5번》이 같은 날 순찰에 참가할수 있습니까? 같은 날

순찰에 참가할수 있다면 가장 가깝게는 어느달, 어느날 같이 순찰에 참가할수 있습니까?

〔**풀이**〕 (1) 남자가 9명이고 녀자가 6명이므로 번호순서에 따라 차례로 순찰에 나갈 때 한바퀴 돌아가는데 걸리는 날자는 〔9, 6〕=18(일간)입니다.

또 4월 20일부터 5월 26일까지는 모두 37일간이고 37÷9=4…1, 37÷6=6…1입니다.

그러므로 5월 26일에는 《남1번》과 《녀1번》이 짝을 무을수 있습니다.

(2) 매 18일간마다 한바퀴씩 돌아가므로 즉 남자 한사람이 두번 순찰하고 녀자 한사람이 세번 순찰할 때마다 한바퀴씩 돌아가므로 《남1번》은 《녀1번》과 《녀4번》과만 짝을 이루고 《녀5번》과는 짝을 이룰수 없습니다.

(3) 4월 20일부터 5월 7일까지는 18일간이므로 한바퀴 돌았습니다.

그러므로 5월 8일에는 《남1번》과 《녀7번》이 짝을 뭇게 됩니다. 그런데 남자가 녀자보다 2명이 더 많으므로 5월 8일부터 《남1번》과 짝을 뭇게 되는 녀자는 차례로 7, 2, 4, 6, 1, 3, 5번입니다.

그리고 《남1번》과 《녀5번》이 짝을 뭇는데는 아직도 9×6=
=54(일간)이 있어야 하는데 5월 8일부터 5월 31일까지 24일간이고 6월 1일부터 6월 30일까지는 30일간입니다.

그러므로 《남1번》과 《녀5번》은 가장 가깝게 만나도 7월 1일에야 같이 순찰에 나갈수 있습니다.

련습 10－3

1. 련속된 네 자연수의 합은 54입니다. 이 네 수의 최소공통배수는 얼마입니까?

2. 두 자연수의 합은 54입니다. 이 두 수의 최소공통배수와 최대공통약수의 차는 114입니다. 이 두 자연수는 얼마입니까?

3. 두 수의 최대공통약수는 6이고 최소공통배수는 108입니다. 이

두 수는 얼마입니까?

4. 령이 아닌 10개의 자연수의 합이 1001이면 이 수들의 최대공통약수는 얼마입니까?

5. 붉은꽃 96송이와 흰꽃 72송이로 꽃다발을 만드는데 매개 꽃다발의 붉은꽃의 송이수가 같고 흰꽃의 송이수도 같게 하려고 합니다. 그러면 매 꽃다발에는 제일 적어서 꽃이 몇송이 들어있습니까?

6. ㄱ, ㄴ 두 수의 최소공통배수는 90이고 ㄴ, ㄷ 두 수의 최소공통배수는 105이며 ㄱ, ㄷ 두 수의 최소공통배수는 126입니다. ㄱ수는 얼마입니까?

7. 두 수의 최대공통약수가 18이고 최소공통배수는 180입니다. 두 수의 차가 54일 때 그 두 수는 각각 얼마입니까?

8. 어떤 전자시계는 매 1시간이 될 때와 30분이 될 때마다 종이 한번씩 울리고 9분이 지날 때마다 전등이 한번씩 켜집니다. 만일 낮 12시에 종도 울리고 전등도 켜졌다면 다음번에는 어느 시간에 종도 울리고 전등도 켜지겠습니까?

9. 2001을 25개 자연수의 합으로 쓰는데는(그 자연수는 같을수도 있고 다를수도 있습니다.) 여러가지 방법이 있는데 매번 쓰는 방법에 대하여 그 25개 자연수에는 다 대응한 최대공통약수가 있습니다. 이런 최대공통약수들가운데서 최대값은 얼마입니까?

10. 할아버지의 지금의 나이는 명호의 현재나이의 7배이고 몇년후에는 명호의 나이의 6배로 되며 또 몇년이 지나면 각각 명호의 나이의 5배, 4배, 3배, 2배로 됩니다. 할아버지의 지금의 나이는 얼마입니까?

11. 두 자연수의 합은 50이고 이것들의 최대공통약수는 5입니다. 그리고 이 두 수는 모두 5가 아닙니다. 이 두 수는 얼마입니까?

12. 련속된 3개의 옹근수의 중간수는 두제곱수입니다. 이런 련속된 3개의 옹근수를 《미묘한 수》라고 합니다. 2008보다 작은 모든 《미묘한 수》의 최대공통약수는 얼마입니까?

13. 배 한바구니를 두알씩 한뭇으로 나누면 1알이 남고 세알

씩 한뭈으로 나누면 2알이 남으며 5알씩 한뭈으로 나누면 4알이 남습니다. 이 바구니에는 배가 적어도 몇알 있습니까?

제4절 홀수와 짝수 및 그 응용

옹근수는 홀수와 짝수의 두가지 큰 류형으로 나눌수 있는데 2로 완제되는 수를 짝수라고 하고 2로 완제되지 않는 수를 홀수라고 합니다. 짝수는 흔히 $2k$(k는 옹근수)로 표시하고 홀수는 $2k+1$(k는 옹근수)로 표시합니다.

중 점

1. 옹근수의 짝홀성에 대하여 정확히 리해해야 합니다.
2. 홀수와 짝수의 성질을 잘 알고 그를 리용하여 문제들을 능숙하게 풀어야 합니다.

〔**례1**〕 $1+2+3+4+\cdots+2001+2002$는 홀수입니까, 짝수입니까?

〔**풀이**〕 합의 짝홀성만 판단하므로 더하는수들가운데 홀수가 몇개 있는가만 알면 됩니다.

1, 2, 3, 4, 5, …, 2001, 2002 이 더하는수들은 홀수 한개, 짝수 한개의 순서로 배렬되여있습니다. 그러므로 그중에는 홀수가 $2002\div2=1001$(개) 있습니다. 그런데 1001이 홀수이므로 계산식에는 모두 홀수개의 개수가 있습니다. 따라서 그 합은 홀수입니다.

〔**례2**〕 다음 식의 □안에 더하기, 덜기기호를 써넣어 같기식이 성립되게 할수 있습니까? 왜 그렇습니까?

$$9\square8\square7\square6\square5\square4\square3\square2\square1=10$$

〔**풀이**〕 □안에는 더하기, 덜기기호를 써넣을수 있고 또 □이 8개이므로 써넣는 방법이 $2^8=256$가지 있습니다. 그러므로 시험해보는 방법으로는 이 문제를 풀수 없습니다.

비교적 좋은 방법은 짝홀성을 리용하여 결론을 추리하는것입니다.

9가 홀수이고 8이 짝수이므로 홀수±짝수=홀수에 의하여 □안에 《+》 또는 《－》가운데서 어느것을 써넣든지간에 9□8=홀수입니다.

7이 홀수이므로 홀수±홀수=짝수에 의하여 9□8□7=짝수입니다.

6이 짝수이므로 짝수±짝수=짝수
5가 홀수이므로 짝수±홀수=홀수
4가 짝수이므로 홀수±짝수=홀수
3이 홀수이므로 홀수±홀수=짝수
2가 짝수이므로 짝수±짝수=짝수
1이 홀수이므로 짝수±홀수=홀수

그러므로 문제의 8개의 □안에 《+》, 《－》를 어떻게 써넣든지간에 얻는 결과는 홀수로서 짝수 10이 될수 없습니다.

〔**례3**〕 수렬 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55…에서는 세번째 수부터 매개 수가 앞의 두 수의 합과 같습니다. 그러면 1000개수중에 홀수는 몇개 있겠습니까?

〔**풀이**〕 수렬의 짝홀성은 수의 구성규칙으로부터 다음과 같습니다.

홀, 홀, 짝, 홀, 홀, 짝, 홀, 홀, 짝, …

즉 세개 수를 한조로 할 때 그중 앞의 두개 수는 홀수이고 뒤의 한개 수는 짝수입니다.

$$1000\div3=333\cdots1$$

따라서 1000개 수중에 짝수가 333개 있고 홀수는 1000－333=
=667(개) 있습니다.

〔**례4**〕 0～9의 열개 수로 두자리수 5개를 만들되 매개 수는 한

번씩 리용하고 그것들의 합이 홀수가 되게 하려고 합니다. 그러면 이 5개 두자리수의 합은 최대로 얼마겠습니까?

〔**풀이**〕 이 문제의 요구에서 합이 최대로 되는것만 먼저 생각하고 5개 수의 합이 홀수여야 한다는 요구는 잠시 생각하지 않습니다.

5개 두자리수의 합이 최대로 되게 하려면 10개 수가운데서 제일 큰 5개를 각각 열의 자리에 놓아야 합니다.

즉 5, 6, 7, 8, 9는 열의 자리에 놓고 0, 1, 2, 3, 4는 일의 자리에 놓아야 합니다. 이렇게 이루어진 5개 수에서 일의 자리가 1과 3인것만 홀수입니다.

이제 5개 두자리수의 합이 홀수여야 한다는 조건을 만족시키려면 이 5개 수가운데는 홀수개의 홀수가 있어야 합니다. 그런데 2개의 홀수가 있으므로 다섯개수의 합은 짝수로서 조건에 맞지 않습니다.

때문에 열의 자리의 한개 홀수와 일의 자리의 한개 짝수를 바꾸되 5개 수의 합이 될수록 크고 바꾸는 두 수의 차가 될수록 작게 해야 합니다. 이로부터 5와 4를 바꾸면 된다는것을 알수 있습니다.

그러면 문제의 조건을 만족시키는 5개 두자리수의 열의 자리는 4, 6, 7, 8, 9이고 일의 자리수는 0, 1, 2, 3, 5입니다.

따라서 이 5개 수의 합은 $(4+6+7+8+9)\times10+(0+1+2+3+$ $+5)=351$입니다.

〔**례5**〕 네자리수 2개를 서로 더하는데 첫번째 네자리수의 매 수자들은 5보다 작지 않고 두번째 네자리수는 첫번째 네자리수의 수자의 위치를 바꾸어놓은것입니다. 한 학생이 계산한 답이 16246이라면 이 답이 정확하겠습니까? 정확하면 그 네자리수 2개를 쓰고 틀린다면 그 리유를 설명하시오.

〔**풀이**〕 틀립니다.

두 네자리수는 수자의 위치만 바꿔놓은것이므로 두 네자리수의 모든 수자의 합은 짝수입니다. 그리고 두 네자리수의 모든 수자는 5보다 작지 않으므로 더할 때 웃자리로 4번 올라가고 한번 올라갈때마다 얻은 합의 수자의 합이 9 줄어들므로 4번에 모두 $9\times4=36$

줄어듭니다. 따라서 모든 수자의 합도 여전히 짝수입니다.

그런데 답은 16246이고 수자의 합은 $1+6+2+4+6=19$인데 이것은 홀수입니다.

따라서 이 학생의 답은 틀린것입니다.

〔례6〕 $a\times b+6=x$에서 a, b는 100보다 작은 씨수이고 x는 짝수입니다. 그러면 x의 최대값은 얼마입니까?

〔풀이〕 x가 짝수이므로 $a\times b+6$도 짝수이고 $a\times b$도 짝수여야 합니다.

그런데 씨수가운데 2만이 짝수이고 $a\times b$에서의 a, b가 다 100보다 작은 씨수이므로 x를 최대로 되게 하려면 $a\times b=2\times 97$이여야 합니다.

$$x=2\times 97+6=200$$

답: x의 최대값은 200입니다.

〔례7〕 ㄱ주머니에는 흰공 1997개와 검은공 1000개가 들어있고 ㄴ주머니에는 검은공 2000개가 들어있습니다. 강호는 매번마다 ㄱ주머니에서 임의로 공 2개를 꺼내는데 두개공의 색갈이 같으면 ㄴ주머니에서 한개를 꺼내 ㄱ주머니에 넣고 색갈이 다르면 흰공을 ㄱ주머니에 도로 넣습니다. 강호가 이렇게 ㄱ주머니에서 2995번 꺼냈다면 ㄱ주머니에는 공이 몇개 남겠습니까? 그것들은 각각 무슨 색갈이겠습니까?

〔풀이〕 공이 몇개 남고 또 각각 무슨 색갈인가를 알기 위해서는 한번 꺼낼 때마다 ㄱ주머니에 있는 공의 변화를 알아야 합니다. (그림 2)

꺼낸 두공의 색갈	ㄱ주머니안의 공의 개수의 변화		
	흰공의 개수	검은공의 개수	총개수
흰공 2개	2개 감소	1개 증가	1개 감소
검은공 2개	변하지 않음	1개 감소	1개 감소
흰공 1개, 검은공 1개	변하지 않음	1개 감소	1개 감소

그림 2

우의 표로부터 한번에 꺼낸 두개 공의 색갈이 어떠하든지 그주머니에서의 공의 총개수가 1개씩 감소한다는것을 알수 있습니다.

이로부터 몇번 꺼낸 다음 그주머니에 남아있는 공의 개수를 구할수 있습니다.

그주머니에 원래 있던 흰공의 수는 홀수였는데 매번 꺼낸 흰공의 수가 짝수(2 또는 0)이므로 홀수－짝수＝홀수에 의하여 마지막에 남는 흰공의 수는 홀수입니다. 그러면 남아있는 공의 총개수에 의하여 남은 공의 색갈을 알수 있습니다.

그러므로 2995번 꺼낸 다음 그주머니에 남는 공의 개수는 1997+＋1000－2995＝2(개)입니다.

또 한번 꺼낼 때마다 그주머니의 흰공의 개수는 변하지 않거나 2개씩 감소합니다. 그런데 원래 있던 흰공의 수 1997이 홀수이므로 매번 꺼낸 후 그주머니에 남은 흰공의 총개수도 언제나 홀수입니다.

또 2보다 크지 않은 홀수는 1뿐이므로 마지막에 남은 두 공은 흰공 1개와 검은공 1개입니다.

〔례8〕 밥상우에 고뿌 7개가 있는데 그 아구리들은 다 우로 향하고있습니다. 매번마다 고뿌 2개씩 뒤집어놓습니다. 이렇게 몇번 뒤집어놓아 고뿌 7개의 아구리가 전부 아래로 향하게 할수 있습니까?

〔풀이〕 맹목적으로 하면 답을 찾지 못할수 있습니다. 그러나 매번 뒤집어놓은 다음 아구리가 우로 향하는 고뿌개수의 짝홀성을 분석하면 문제의 해결을 찾을수 있습니다.

아구리가 우로 향한 고뿌는 1번, 3번, …… 뒤집어야 아구리가 아래로 향하게 할수 있습니다. 즉 매개 고뿌는 홀수번 뒤집어놓은 후에 아구리의 방향을 달리 할수 있습니다.

그런데 지금 아구리가 다 우로 향한 고뿌 7개를 전부 아래로 향하게 하려 하므로 매개 고뿌는 반드시 홀수번 번져놓아야 합니다. 또 홀수의 홀수개의 합이 홀수이므로 홀수

번 번져놓아야 7개 고뿌의 아구리를 다 아래로 향하게 할수 있습니다.

또한 매번 고뿌 2개씩만 동시에 뒤집어놓아야 하는데 이것은 어떻게 번져놓든지 마지막에 번져놓은 총회수는 꼭 2의 배수라는 것을 말합니다.

그러면 어떤 옹근수에 2를 곱한 적이 꼭 짝수이므로 번져놓은 총회수도 짝수입니다.

이것은 우의 결론과 모순됩니다. 그러므로 조건에 따라 고뿌를 번져놓으면 어떻게 번져놓든지 고뿌의 아구리가 다 아래로 향하게는 할수 없습니다.

〔례9〕 카드 50장이 있는데 매개 카드에는 1부터 50까지의 수가 각각 씌여져있습니다. 카드의 한면은 붉은색이고 다른 한면은 푸른색인데 두개 면에 다 같은 수가 씌여있습니다.

어느 한 반에 학생이 50명 있는데 선생님은 이 50장 카드의 푸른색면이 우로 향하게 교탁우에 펴놓고 학생들에게 《출석번호의 순서에 따라 앞에 나와 카드를 번지되 그 규칙은 카드의 수자가 학생의 출석번호의 배수이면 그것을 번져놓아 푸른색은 붉은색으로 되게 하고 붉은색은 푸른색으로 되게 하는것입니다.》라고 말하였습니다.

그러면 출석번호가 50인 학생이 선생님의 요구대로 다 번진 다음 붉은색이 우로 향한 카드는 몇장이겠습니까?

〔풀이〕 카드 한장이 마지막에 푸른색인가 붉은색인가 하는 것은 번져진 회수에 관계됩니다. 처음 시작할 때 모든 카드는 푸른색이 다 우로 향하였으므로 짝수번 번져진 카드는 여전히 푸른색이고 홀수번 번져진 카드는 붉은색입니다. 2제곱수만이 홀수개의 약수를 가지고있고 2제곱수가 아닌것은 짝수개의 약수를 가지고있습니다.

그런데 1～50개 수에는 2제곱수가 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 이 7개 수만 있으므로 붉은색이 우로 향한 카드는 모두 7장입니다.

련습 10−4

1. ㄱ통에는 흰바둑알 180개와 검은바둑알 181개 들어있고 ㄴ통에는 흰바둑알 181개 들어있습니다.

명식이는 매번 ㄱ통에서 임의로 바둑알 2개씩 꺼내는데 그 2개가 다 같은 색갈이면 ㄴ통에서 흰바둑알 1개를 꺼내여 ㄱ통에 넣고 꺼낸 두 바둑알의 색갈이 다르면 그중의 검은 바둑알을 ㄱ통에 넣습니다.

그러면 명식이가 몇번 꺼냈을 때 ㄱ통안에 한개 바둑알만 남으며 그 바둑알의 색갈은 무슨 색갈입니까?

2. 어느 한 학교의 수학경연에 문제가 20문제 제시되였는데 한 문제를 옳게 풀면 3점을 주고 문제를 풀지 못하면 1점을 주며 문제를 틀리게 풀면 1점을 깎습니다. 그러면 경연에 몇명이 참가하든지간에 경연에 참가한 모든 학생의 총점수는 홀수입니까, 짝수입니까?

3. 카드가 15장 있는데 그중 3장에는 1이 씌여있고 5장에는 3이 씌여있으며 7장에는 5가 씌여있습니다. 임의로 5장을 선택할 때 그 합이 30이 될수 있습니까? 왜 그렇습니까?

4. 몇개의 수가 있는데 앞의 네개 수는 차례로 1, 9, 8, 8이고 그다음의 다섯번째 수부터는 앞의 네개 수를 더한 합의 일의 자리의 수입니다. 그러면 이 수들에서 1, 9, 9, 4 이 네개 수가 차례로 나타나겠습니까? 왜 그렇습니까?

5. 서로 다른 자연수 네개가 있습니다. 제일 큰 수와 제일 작은 수의 차는 4이고 제일 큰 수와 제일 작은 수의 적은 홀수이며 이 네개 수의 합은 제일 작은 두자리수입니다. 이 네개 수의 적은 얼마입니까?

6. 련속된 7개 씨수를 큰것부터 차례로 배렬하면 a, b, c, d, e, f, g입니다. 이것들의 합은 짝수입니다. c는 얼마입니까?

7. A, B, C, D, E, F, G 7개 전등에 각각 스위치가 달려있습니다. 처음에 B, D, F가 켜져있었습니다.

한 학생이 A로부터 G까지, 다시 A로부터 G까지 또 A로부터

G까지의 순서로 차례로 스위치끈을 당겼습니다. 그 학생은 끈을 모두 2000번 당겼습니다. 이때 켜진 전등은 무엇이겠습니까?

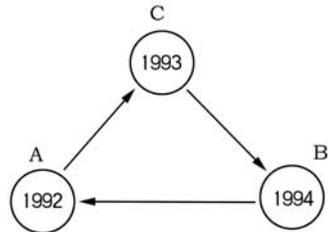
8. 책상우에 쇠돈 몇개를 한줄에 놓았습니다. 쇠돈의 뒤면이 모두 우로 향했습니다. 두 어린이가 쇠돈뒤집기유희를 놉니다. 유희에는 다음과 같은 규정이 있습니다.

매 사람이 매번 한개만 번지거나 서로 나란히 있는 두개를 번져 앞면이 우로 향하게 합니다. 두사람이 돌아가면서 번집니다. 마지막에 쇠돈의 앞면이 우로 향하게 하는 사람이 이깁니다. 이기려면 어떤 방법을 써야 합니까?

9. $a^2=2002+b^2$이 되는 자연수 a와 b를 찾을수 있습니까?

10. 4학년학생 1명이 수학경연에 참가했습니다. 모두 30문제가 있습니다. 점수표준은 다음과 같습니다. 한 문제를 옳게 풀면 5점을 주고 풀지 못하면 1점을 주고 틀리게 풀면 3점을 잃습니다. 이 학생이 얻은 총점수가 짝수겠습니까, 홀수이겠습니까? 무엇때문에?

11. 그림 3에서와 같이 A, B, C 세 동그라미에는 세 수가 각각 씌여져있는데 A와 B를 더한 합으로 B자리에 쓰고 B와 C의 수의 합으로 C자리에 쓰며 C와 A의 수의 합으로 A자리에 씁니다. 우의 세번절차가 끝나면 한차례의 조작을 완수하였다고 합니다. 이제 이와 같은 조작을 1994번 진행한 다음에는 세 동그라미안의 수가 각각 홀수이겠습니까, 짝수이겠습니까?

그림 3

12. 어느 한 유치원에서 사탕을 나누어주는데 매 어린이들이 받는 사탕의 알수는 그들이 함께 공부하는 어린이수에 3을 더한것과 같았습니다.

결과 매개 반에서 받은 사탕의 총알수는 다 짝수라는것을 발견하였습니다. 이것은 무엇때문입니까?

제5절 나머지있는 나누기

나누기에는 나머지가 0인것과 나머지가 0이 아닌 두가지가 있는데 나머지가 0이 아닌 나누기를 나머지있는 나누기라고 합니다.

나머지있는 나누기의 응용은 완제의 개념의 확장으로서 아주 널리 응용되고있습니다.

중 점

1. 나머지있는 나누기에서 나누어지는수, 나누는수, 상, 나머지사이의 관계를 능숙하게 다룰줄 알아야 합니다.
2. 나머지있는 나누기의 지식을 정확히 리용하여 문제를 풀어야 합니다.

〔례1〕 나누어지는수는 나누는수보다 78 크고 나누어지는수를 나누는수로 나누어 얻은 상은 6이고 나머지는 3입니다. 나누어지는수와 나누는수는 각각 얼마입니까?

〔풀이〕 문제에서 나누어지는수는 나누는수의 6배보다 크므로 나누는수의 5배보다도 큽니다. 또 나누는수의 5배에 3을 더한것이 78이므로 78−3=75는 나누는수의 5배이기때문에 나누는수를 구할수 있고 나누어지는수도 구할수 있습니다.

$$(78-3)\div(6-1)=$$
$$=75\div5=$$
$$=15$$
$$15\times6+3=93$$

답: 나누어지는수는 93이고 나누는수는 15입니다.

〔례2〕 251을 두자리수로 나누었는데 나머지가 41이였습니다. 그 두자리수를 구하시오.

〔풀이〕 구하려는것은 41보다 큰 두자리수입니다.

따라서 251＝나누는수×상＋41

251－41＝나누는수×상

그러므로 210＝나누는수×상

210＝2×3×5×7

그러므로 210의 두자리수인 약수는 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70입니다. 여기서 42, 70은 나머지 41보다 크므로 조건을 만족시킵니다. 나머지수들은 버립니다.

그러면 구하려는 두자리수는 42 또는 70입니다.

〔례3〕 두 수의 나누기에서 상은 4이고 나머지는 8이며 나누어지는수, 나누는수, 상, 나머지 네 수의 합은 415입니다. 나누어지는수는 얼마입니까?

〔풀이〕 나누어지는수에서 8을 던 다음 얻은 수는 나누는수의 4배입니다. 그러면 합과 배수관계에 관한 문제로부터 나누는수는 (415－4－8－8)÷(4＋1)＝79이고 나누어지는수는 79×4＋8＝＝324입니다.

답: 나누어지는수는 324입니다.

〔례4〕 한 자연수로 어떤 옹근수를 나누니 상은 40이고 나머지는 16이였습니다. 나누어지는수, 나누는수, 상과 나머지의 합이 933이면 나누어지는수와 나누는수는 각각 얼마입니까?

〔풀이〕 조건에 의하여

나누어지는수＋나누는수＝933－40－16＝877

(나누는수×40＋16)＋나누는수＝877

나누는수×41＝877－16

나누는수＝861÷41, 나누는수＝21

따라서 나누어지는수＝21×40＋16＝856

답: 나누어지는수는 856이고 나누는수는 21입니다.

〔례5〕 어떤 수들의 렬이 있는데 첫 수는 7이고 두번째 수는 11이며 세번째 수부터는 그앞의 두 수의 합입니다. 1998번째 수를 3으로 나눈 나머지는 얼마입니까?

〔풀이〕 수들의 렬은 다음과 같습니다.

7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, …

그런데 1998번째 수까지 쓰기는 쉽지 않습니다. 때문에 이 수들을 3으로 나눌 때 나머지의 규칙이 어떤가 하는것을 보아야 합니다.

나머지를 보면 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0, 1, 1, 2, 0, 2, 2, …입니다. 즉 나머지는 일정한 규칙에 따라 나타나는데 첫번째로부터 여덟번째 나머지까지 한개 순환마디를 구성합니다.

그러므로 1998을 8로 나눈 나머지만 구하면 그것이 순환마디의 몇번째에 해당하는가를 찾고 답을 구할수 있습니다.

1998÷8=249…6이므로 나머지는 1입니다.

답: 1998번째 수를 3으로 나눈 나머지는 1입니다.

〔례6〕 자연수 n으로 63, 91, 129를 나눈 나머지의 합이 25이면 n은 얼마입니까?

〔풀이〕 수의 완제성에 의하여 63+91+129−25는 n으로 완제됩니다.

그런데 258=2×3×43이고 세 수의 나머지의 합이 25이므로 그중 제일 큰 나머지는 25보다 작거나 25와 같습니다.

그러면 $25<n<63$이고 $n=43$입니다.

답: n은 43입니다.

〔례7〕 두 바구니에 사과 240알과 귤 313알이 각각 있는데 어린이들에게 나누어줍니다. 여기서 사과는 마지막 2알이 남았을 때 더 나눌수 없었고 귤은 마지막 7알이 남았을 때 더 나눌수 없었습니다. 과일을 몇명의 어린이들에게 나누어주었겠습니까?

〔풀이〕 이 문제는 나누는수를 구하는 문제인데 어떤 수로 240을 나누면 나머지가 2이고 313을 나누면 나머지가 7일 때 그 수는 제일 커서 얼마겠는가 하는 문제입니다.

240을 어떤 수로 나누면 나머지가 2이므로 240−2=238은 어떤 수로 완제되고 313도 그 수로 나누면 나머지가 7이므로 313−7=306은 그 수의 배수입니다.

따라서 238과 306의 최대공통약수만 구하면 어린이가 제일 많아서 몇명인가를 구할수 있습니다.

$$240-2=238(알)$$

$$313-7=306(알)$$

$$(238,\ 306)=34(명)$$

답: 어린이는 제일 많아서 34명입니다.

〔례8〕 3월 18일은 일요일입니다. 3월 17일을 첫날로 하여 거꾸로 센 1993번째 날은 무슨 요일이겠습니까?

〔풀이〕 한주일은 7일이고 1993÷7=284(주일)…5일간이므로 일요일부터 거꾸로 센 다섯번째 날은 화요일입니다. 따라서 거꾸로 센 1993번째 날은 화요일입니다.

〔례9〕 어떤 수를 7로 나누면 나머지가 2이고 17로 나누면 나머지가 14입니다.

(1) 조건을 만족시키는 제일 작은 수는 얼마입니까?

(2) 400까지에서 조건을 만족시키는 모든 수를 구하시오.

〔풀이〕 조건을 만족시키는, 7로 나누면 나머지가 2이거나 17로 나누면 나머지가 14인 수들은 각각 하나의 같은차수렬을 이룹니다. 분명히 이 두 수렬에서 동시에 나타나는 수중 제일 작은 수가 조건 (1)을 만족시킵니다. 이 수만 구하면 (2)를 만족시키는 수를 어렵지 않게 구할수 있습니다.

여기서 제일 작은 수를 7로 나누면 나머지가 2인데 그 수에 7의 옹근수배를 더하여도 7로 나누면 나머지가 2로 됩니다. 마찬가지로 제일 작은 수에 17의 몇배를 더한 수도 역시 17로 나누면 나머지가 14로 됩니다.

그러므로 17과 7의 최소공통배수를 차례로 더하면 됩니다.

7로 나누면 나머지가 2인 수들은 다음과 같은 수들의 렬을 이룹니다.

2, 9, 16, 23, 30, 37, 44, 51, 58, 65…

17로 나누면 나머지가 14인 수들은 14, 31, 48, 65…와 같은 수렬을 이룹니다. 분명히 7로 나누면 나머지가 2이고 17로 나누면 나

머지가 14인 수는 65입니다.

$$65+17\times7=184$$

$$65+17\times7\times2=303$$

답: 제일 작은 수는 65이고 400까지에서 조건을
만족시키는 수는 64, 184, 303 세 수입니다.

〔례10〕 어떤 수를 5로 나누면 나머지가 3이고 6으로 나누면 나머지가 4이며 7로 나누면 나머지가 1입니다. 조건을 만족시키는 제일 작은 자연수를 구하시오.

〔풀이〕 5로 나누면 나머지가 3이라는것은 2를 더하면 5로 완제된다는것이고 마찬가지로 16으로 나누면 나머지가 4라는것은 2를 더하면 6으로 완제된다는것입니다.

〔5, 6〕$-2=28$은 앞의 두 조건을 만족시킵니다.

28+〔5, 6〕×?에서 ?가 어떤 수여야 7로 나누면 나머지가 1이라는 조건을 만족시키겠는가를 생각합니다. 28+〔5, 6〕×4=148, $148=21\times7+1$ 그러므로 제일 작은 자연수는 148입니다.

〔례11〕 1보다 큰 자연수로 300, 243, 205를 나누면 같은 나머지를 얻습니다. 그러면 그 자연수는 얼마입니까?

〔풀이〕 수의 완제의 성질에 의하여 만일 두 옹근수 a와 b를 자연수 m으로 나눌 때 나머지가 같으면 두 옹근수의 차(큰 수－작은 수)도 꼭 m으로 완제됩니다.

$$300-243=57,\ 300-205=95,\ 243-205=38$$

그러면 57, 95, 38 이 세 자연수는 1보다 큰 자연수로 완제됩니다. 그런데 57, 95, 38의 공통약수는 1과 19뿐입니다. 따라서 구하려는 자연수는 19입니다.

〔례12〕 그림 4에서와 같이 검은 구슬과 흰 구슬을 우로부터 아래로 층층이 배렬하고 매 층에서 또 왼쪽으로부터 한알씩한알씩 배렬합니다. 흰 구슬이 처음으로 검은 구슬보다 2003개 더 많을 때는 바로 몇층, 몇번째 알까지

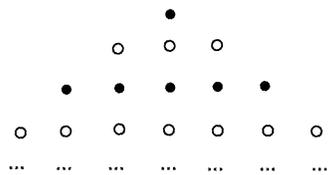



그림 4

배렬하였을 때입니까?

〔**풀이**〕 홀수층은 검은 구슬이고 짝수층은 흰 구슬이며 매 층의 구슬의 개수=2×(층수−1)+1이고 매 두 층에서 흰 구슬은 검은 구슬보다 2개 더 많습니다.

2003÷2=1001…1, 1001×2=2002층까지 배렬하였을 때 흰 구슬은 검은 구슬보다 2002개 더 많습니다. 그러나 조건을 만족시키려면 아직도 검은 구슬 한층과 흰 구슬 한층을 더 배렬해야 하고 흰 구슬은 검은 구슬보다 한개만 더 많게 배렬해야 합니다.

따라서 2002+2=2004(층) 배렬하게 되는데 이때 매 층의 흰 구슬은 그 웃층의 검은 구슬보다 2개 더 많게 됩니다. 그러므로 이때에는 흰 구슬을 한개 적게 배렬해야 합니다.

그러면 마지막 층에 배렬한 흰 구슬은 2×(2004−1)+1−1=
=4006(개)여야 합니다.

답: 흰 구슬이 처음으로 검은 구슬보다 2003개 더 많을 때는 2004층의 4006번째 알까지 배렬하였을 때입니다.

련습 10−5

1. 구슬을 실에 빨간것 3개, 노란것 2개, 파란것 4개의 규칙으로 꿰였습니다. 그러면 32번째 구슬은 무슨 색이고 64번째 구슬은 무슨 색이겠습니까?

2. 957을 어떤 수로 나누면 상은 16이고 나누는수는 나머지보다 35 큽니다. 나누는수와 나머지는 각각 얼마입니까?

3. 어떤 두자리수가 3과 7의 공통배수인데 그 수로 3527을 나누면 불완전상(완제되지 않고 나누는수보다 작은 나머지가 생길 때) 한개와 나머지 62를 얻습니다. 그 두자리수는 얼마입니까?

4. 어떤 세자리수를 57로 나누면 나머지는 27이고 217로 나누면 나머지는 60입니다. 그 수를 구하시오.

5. 2205를 어떤 두자리수로 나누면 나머지는 21입니다. 그 두자

리수는 얼마입니까?

6. 어떤 자연수로 다른 한 자연수를 나누면 불완전상은 8이고 나머지는 16입니다. 나누어지는수, 나누는수, 상, 나머지 이 네수의 합이 463일 때 나누는수를 구하시오.

7. 1보다 큰 옹근수로 300, 262, 205를 나누면 같은 나머지를 얻습니다. 이 옹근수는 얼마입니까?

8. 13511, 13903 및 14589를 나눌 때 같은 나머지가 생기는 제일 큰 옹근수는 얼마입니까?

9. 한 옹근수로 53, 89, 127을 나누어서 얻는 세 나머지의 합은 23입니다. 이 옹근수는 얼마입니까?

10. 두 자연수를 나눌 때 상은 17이고 나머지는 13입니다. 나누어지는수, 나누는수, 상과 나머지의 합은 2113입니다. 나누어지는 수는 얼마입니까?

11. 어떤 형태의 자연수의 15배에서 1을 던 수는 1999로 완제됩니다. 이런 수중에서 제일 작은 수는 얼마입니까?

제11장 분 수

제1절 분수의 크기의 비교

분수의 크기를 비교하는데는 크게 세가지가 있습니다.

첫째 방법: 두 수의 분모가 같으면 분자가 큰 분수가 크다는것.

둘째 방법: 두 분수의 분자가 같으면 분모가 작은 분수가 크다는것.

셋째 방법: 가분수는 참분수보다 크다는것.

중 점

1. 특수한 분수와 분자, 분모의 수자가 비교적 큰 분수의 몇가지 비교방법에 대해 잘 알아야 합니다.

2. 몇가지 특수한 비교방법을 리용하여 문제를 능숙하게 풀도록 하여야 합니다.

〔례1〕 $\frac{15}{22}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{12}{17}$의 크기를 비교하시오.

〔풀이〕 여기서 세 분수의 분모를 같게 하려면 비교적 어렵습니다. 그런데 분자를 보면 60은 세 분자의 배수입니다.

$$\frac{15}{22}=\frac{15\times4}{22\times4}=\frac{60}{88}$$

$$\frac{5}{9}=\frac{5\times12}{9\times12}=\frac{60}{108}$$

$$\frac{12}{17}=\frac{12\times5}{17\times5}=\frac{60}{85}$$

그러면 $\frac{60}{85}>\frac{60}{88}>\frac{60}{108}$이므로

$$\frac{12}{17}>\frac{15}{22}>\frac{5}{9}$$

〔례2〕 $A\times\frac{2}{3}=B\div\frac{3}{4}=C\div1\frac{1}{3}=D\times1\frac{1}{2}$일 때 A, B, C, D 이 네 수를 큰것으로부터 작아지는 순서로 배렬하시오.

〔풀이〕 $A\times\frac{2}{3}=B\div\frac{3}{4}=C\div1\frac{1}{3}=D\times1\frac{1}{2}=k$라고 하면

$$A\times\frac{2}{3}=k\text{에서 } A=k\div\frac{2}{3}=1\frac{1}{2}k=1\frac{6}{12}k$$

$$C\div\frac{4}{3}=k\text{에서 } C=\frac{3}{4}k=\frac{9}{12}k$$

$$B\div\frac{3}{4}=k\text{에서 } B=1\frac{1}{3}k=1\frac{4}{12}k$$

$$D\times1\frac{1}{2}=k\text{에서 } D=k\div1\frac{1}{2}=\frac{2}{3}k=\frac{8}{12}k$$

$1\frac{6}{12}k>1\frac{4}{12}k>\frac{9}{12}k>\frac{8}{12}k$이므로 $A>B>C>D$입니다.

〔례3〕 $\frac{5}{17}$, $\frac{6}{19}$, $\frac{15}{46}$, $\frac{10}{33}$, $\frac{30}{37}$에서 어느것이 제일 큽니까?

〔풀이〕 5개 분수의 분모를 같은 수로 고치려면 비교적 시끄럽습니다. 분자들을 보면 분모를 같은 수로 만드는것보다는 편리합니다. 그것은 30이 바로 5, 6, 15, 10 네 수의 배수이기때문입니다.

그러면 분수의 기본성질에 의하여 우의 5개 분수를 분자가 다

30인 분수로 고칠수 있습니다.

$$\frac{5}{17}=\frac{5\times6}{17\times6}=\frac{30}{102},\quad \frac{6}{19}=\frac{6\times5}{19\times5}=\frac{30}{95}$$

$$\frac{15}{46}=\frac{15\times2}{46\times2}=\frac{30}{92},\quad \frac{10}{33}=\frac{10\times3}{33\times3}=\frac{30}{99},\quad \frac{30}{37}$$

이 5개 분수의 분자는 다 30이고 분모는 작은것으로부터 37, 92, 95, 99, 102입니다. 분수의 크기를 비교하는 두번째 방법에 의하여

$$\frac{30}{102}<\frac{30}{99}<\frac{30}{95}<\frac{30}{92}<\frac{30}{37}$$

즉 $\frac{5}{17}<\frac{10}{33}<\frac{6}{19}<\frac{15}{46}<\frac{30}{37}$

따라서 5개 분수가운데서 제일 큰것은 $\frac{30}{37}$입니다.

〔례4〕 다음의 수들중에서 두 분수의 크기를 비교하시오.

(1) $\frac{6}{13}$과 $\frac{8}{15}$

(2) $\frac{33}{40}$과 $\frac{32}{41}$

(3) $\frac{218191}{654321}$과 $\frac{152347}{456789}$

〔풀이〕 (1) $\frac{6}{13}<\frac{1}{2}$

그런데 $\frac{8}{15}>\frac{1}{2}$

그러므로 $\frac{6}{13}<\frac{8}{15}$

(2) $\frac{33}{40}>\frac{32}{40}$

그런데 $\frac{32}{40}>\frac{32}{41}$

그러므로 $\frac{33}{40}>\frac{32}{41}$

(3) $\frac{218191}{654321}-\frac{1}{3}=\frac{84}{654321}$

$\frac{152347}{456789}-\frac{1}{3}=\frac{84}{456789}$

그런데 $\frac{84}{654321}<\frac{84}{456789}$

그러므로 $\frac{218191}{654321}<\frac{152347}{456789}$

〔례5〕 $A=\frac{29}{62}$와 $B=\frac{293031}{626160}$의 크기를 비교하시오.

〔풀이〕 $\frac{29}{62}=\frac{29\times 10101}{62\times 10101}=\frac{292929}{626262}$

$\frac{293031}{626160}=\frac{292929}{626160}+\frac{102}{626160}$

$\frac{292929}{626262}<\frac{292929}{626160}$

그러므로 $\frac{292929}{626262}<\frac{292929}{626160}+\frac{102}{626160}$

즉 $\frac{292929}{626262}<\frac{293031}{626160}$

$\frac{29}{62}<\frac{293031}{626160}$

따라서 $A<B$입니다.

〔례6〕 다음의 식들에서 두 분수의 크기를 비교하시오.

(1) $\dfrac{1234567890}{2345678901}$과 $\dfrac{1234567890-1990}{2345678901-1990}$

(2) $\dfrac{1234567890}{2345678901}$과 $\dfrac{1234567890+1990}{2345678901+1990}$

(3) $\dfrac{1011121314151617181920}{2122232425262728293031}$과 $\dfrac{1011121314151617181920+\overbrace{11\cdots11}^{222개}}{2122232425262728293031+\underbrace{11\cdots11}_{222개}}$

(4) $\dfrac{7778798081828384858687}{6768697071727374757677}$과

$$\frac{7778798081828384858687-55555}{6768697071727374757677-55555}$$

〔풀이〕 (1) $1234567890<2345678901$이므로

$$\frac{1234567890}{2345678901}>\frac{1234567890-1990}{2345678901-1990}$$

(2) $1234567890<2345678901$이므로

$$\frac{1234567890}{2345678901}<\frac{1234567890+1990}{2345678901+1990}$$

(3) $1011121314151617181920<2122232425262728293031$이므로

$$\frac{1011121314151617181920}{2122232425262728293031}<$$

$$<\frac{1011121314151617181920+\overbrace{11\cdots11}^{222개}}{2122232425262728293031+\underbrace{11\cdots11}_{222개}}$$

(4) $7778798081828384858687>6768697071727374757677$이므로

$$\frac{7778798081828384858687}{6768697071727374757677}<\frac{7778798081828384858687-55555}{6768697071727374757677-55555}$$

〔례7〕 분수 $\dfrac{m}{n}$과 $\dfrac{m-1}{n-1}$의 크기를 비교하시오. (m, n은 다

자연수)

〔**풀이**〕 $\frac{m}{n}$이 참분수인가 아니면 가분수인가에 따라 결과가 달라지므로 경우에 따라 고려해야 합니다.

① $n=m$이면 $\frac{m}{n}=\frac{m-1}{n-1}=1$;

② $n>m$이면 즉 $\frac{m}{n}$이 참분수이면

$$1-\frac{m}{n}=\frac{n-m}{n},$$

$$1-\frac{m-1}{n-1}=\frac{n-1-m+1}{n-1}=\frac{n-m}{n-1}>\frac{n-m}{n}$$

그러므로 $\frac{m-1}{n-1}<\frac{m}{n}$

③ $n<m$이면 즉 $\frac{m}{n}$이 가분수이면

$\frac{m}{n}-1=\frac{m-n}{n}$, $\frac{m-1}{n-1}-1=\frac{m-1-n+1}{n-1}=\frac{m-n}{n-1}$이고

$\frac{m-n}{n}<\frac{m-n}{n-1}$이므로 $\frac{m}{n}<\frac{m-1}{n-1}$

우의 내용을 종합하면

$m=n$일 때 $\frac{m}{n}=\frac{m-1}{n-1}$,

$m<n$일 때 $\frac{m}{n}>\frac{m-1}{n-1}$,

$m>n$일 때 $\frac{m}{n}<\frac{m-1}{n-1}$

련습 11－1

1. 분수 $\frac{3}{15}$, $\frac{6}{17}$, $\frac{10}{23}$, $\frac{15}{33}$를 작은것부터 차례로 쓰시오.

2. 분수 $\frac{2}{5}$, $\frac{5}{11}$, $\frac{8}{17}$, $\frac{20}{41}$, $\frac{40}{82}$에서 제일 큰것은 어느것이고 제일 작은것은 어느것입니까?

3. 분수 $\frac{9}{20}$, $\frac{8}{19}$, $\frac{15}{31}$, $\frac{8}{23}$에서 제일 큰 분수와 제일 작은 분수의 적은 얼마입니까?

4. $\frac{33}{333}$, $\frac{333}{3333}$, $\frac{3333}{33333}$, $\frac{33333}{333333}$ 가운데서 가장 큰것은 어느것이고 가장 작은것은 어느 분수입니까?

5. $\frac{14}{19}$, $\frac{13}{24}$, $\frac{14}{23}$, $\frac{15}{19}$, $\frac{13}{23}$을 크기순서대로 쓰시오.

6. 분수 $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{17}{35}$, $\frac{100}{201}$, $\frac{151}{301}$ 가운데서 제일 큰것은 어느것입니까?

7. $\frac{29}{37}<\frac{43}{A}<\frac{37}{43}$이 성립되려면 A는 가장 많아서 몇개의 서로 다른 자연수로 표시할수 있습니까?

8. $\frac{333333}{666667}$과 $\frac{444448}{888888}$의 크기를 비교하시오.

9. $\frac{7}{18}<\frac{n}{5}<\frac{20}{7}$을 만족시키는 모든 자연수 n의 합은 얼마입니까?

10. $\frac{5}{9}$보다 크고 $\frac{4}{7}$보다 작으며 이 두 분수와 단위의 차만 가지는 분수는 얼마입니까?

11. 학교에서 학생 16명이 수학경연에 참가하였는데 몇명의 학생이 예선을 거쳐 결승경연에 참가하게 되였습니다. 경연에

참가한 학생은 01, 02, ···, 10, 11, ···, 16으로 번호를 달고 결승경연에 참가할 학생의 번호를 ☆로 하면 다음 관계식을 만족시킵니다.

$$\frac{4}{5} > \frac{7}{☆} > \frac{7}{13}$$

몇명의 학생이 결승경기에 참가할 자격을 얻었습니까? 그들은 각각 무슨 번호의 학생입니까?

12. $A=\frac{222221}{222223}$, $B=\frac{333331}{333334}$이면 A와 B중에서 큰 수는 어느것입니까?

13. $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{9}{11}$, $\frac{11}{13}$, ··· 가운데서 어느 수부터 1에서 매개 수를 던 차가 모두 $\frac{1}{1000}$보다 작겠습니까?

14. 다음 계산식에서 답이 제일 큰 식은 어느것입니까?

(1) $\left(\frac{1}{17}+\frac{1}{19}\right)\times 20$

(2) $\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{29}\right)\times 30$

(3) $\left(\frac{1}{31}+\frac{1}{37}\right)\times 40$

(4) $\left(\frac{1}{41}+\frac{1}{47}\right)\times 50$

제2절 분수의 합을 구하기

분모가 서로 다른 분수를 더하거나 덜 때에는 먼저 통분을 거쳐 같은 분모로 고친 다음 계산할수 있습니다.

례를 들면 $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$과 같은것입니다. 여기서 분모 3, 4는 린접한 두 자연수이고 공통분모는 두 수의 적입니다.

이 례제를 일반적인 분수의 더하기와 덜기로 넓히면 다음과 같은 같기식을 얻을수 있습니다.

즉 $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$ 또는 $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

이 같기식을 마디가르는 공식이라고 합니다.

중 점

1. 마디가르는 공식의 뜻을 잘 알아야 합니다.
2. 마디를 가르는 공식을 리용하여 어떤 어려운 분수의 합도 구할수 있는 능력을 키워야 합니다.

〔례1〕 $\frac{1}{1985\times1986}+\frac{1}{1986\times1987}+\frac{1}{1987\times1988}+\cdots+$ $+\frac{1}{1994\times1995}+\frac{1}{1995\times1996}+\frac{1}{1996\times1997}+\frac{1}{1997}$을 계산하시오.

〔풀이〕 문제에서의 더하는수는 마지막의 $\frac{1}{1997}$을 제외하고 그밖의 매개의 더하는수의 분자는 다 1이며 분모는 린접한 두 자

연수의 적으로 되였습니다.

그러므로 마디를 가르는 방법으로 계산하는것이 편리합니다.

$$\text{주어진 식}=\frac{1}{1985}-\frac{1}{1986}+\frac{1}{1986}-\frac{1}{1987}+\frac{1}{1987}-\frac{1}{1988}+$$

$$+\cdots+\frac{1}{1995}-\frac{1}{1996}+\frac{1}{1996}-\frac{1}{1997}+\frac{1}{1997}=$$

$$=\frac{1}{1985}$$

〔례2〕 다음 식을 계산하시오.

$$1\frac{1}{3}-\frac{7}{12}+\frac{9}{20}-\frac{11}{30}+\frac{13}{42}-\frac{15}{56}+\frac{17}{72}-\frac{19}{90}$$

〔풀이〕 문제에서 분수는 린접한 두 자연수의 적과 합을 분모와 분자로 하고있으므로 마디를 가르는 방법으로 계산할수 있습니다.

$$\text{주어진 식}=\frac{1+3}{1\times3}-\frac{3+4}{3\times4}+\frac{4+5}{4\times5}-\frac{5+6}{5\times6}+\frac{6+7}{6\times7}-$$

$$-\frac{7+8}{7\times8}+\frac{8+9}{8\times9}-\frac{9+10}{9\times10}=$$

$$=(1+\frac{1}{3})-(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{4}+\frac{1}{5})-(\frac{1}{5}+\frac{1}{6})+$$

$$+(\frac{1}{6}+\frac{1}{7})-(\frac{1}{7}+\frac{1}{8})+(\frac{1}{8}+\frac{1}{9})-$$

$$-(\frac{1}{9}+\frac{1}{10})=$$

$$=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+$$

$$+\frac{1}{7}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{9}-\frac{1}{10}=$$

$$=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$$

〔례3〕 다음 식을 계산하시오.

$$\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\cdots+\frac{1}{1+2+\cdots+99}$$

〔풀이〕 분수의 분자는 다 1이고 분모는 몇개의 련속된 자연수의 합으로 되였습니다.

그러므로 련속된 자연수의 합의 공식에 의하여 주어진 식을 전환시킨 다음 마디가르는 공식에 의하여 답을 구합니다.

$$주어진\ 식=\frac{1}{\frac{(1+2)\times2}{2}}+\frac{1}{\frac{(1+3)\times3}{2}}+\frac{1}{\frac{(1+4)\times4}{2}}+$$

$$+\cdots+\frac{1}{\frac{(1+99)\times99}{2}}=$$

$$=\frac{2}{3\times2}+\frac{2}{4\times3}+\frac{2}{5\times4}+\cdots+\frac{2}{100\times99}=$$

$$=2\times(\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\cdots+\frac{1}{99\times100})=$$

$$=2\times〔(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{5})+$$

$$+\cdots+(\frac{1}{99}-\frac{1}{100})〕=$$

$$=2\times(\frac{1}{2}-\frac{1}{100})=$$

$$=\frac{49}{50}$$

〔례4〕 한 분수를 $\frac{5}{22}$, $\frac{6}{11}$, $\frac{20}{77}$으로 각각 나눈 세개의 상이 다 옹근수입니다. 그러면 이런 분수들중 제일 작은것은 얼마입니까?

〔풀이〕 한 분수를 $\frac{5}{22}$, $\frac{6}{11}$, $\frac{20}{77}$으로 각각 나눈 상이 다 옹근수라는것은 한 분수에 $\frac{22}{5}$, $\frac{11}{6}$, $\frac{77}{20}$을 각각 곱하였을 때 얻어진 세개 적이 다 옹근수라는것입니다.

그러므로 이 분수의 분자는 5, 6, 20의 공통배수이고 분모는 22, 11, 77의 공통약수입니다.

따라서 이런 분수들중 제일 작은 분수의 분자는 5, 6, 20의 최소공통배수여야 하고 분모는 22, 11, 77의 최대공통약수여야 합니다.

$$[5, 6, 20]=60, \ (22, 11, 77)=11$$

구하려는 제일 작은 분수는 $\frac{60}{11}$입니다.

답: 이런 분수들중 제일 작은것은 $\frac{60}{11}$입니다.

〔례5〕 A, B, C, D, E, F는 서로 다른 자연수입니다.

A, B, C, D, E, F가 각각 어떤 수일 때 다음 갈기식이 성립하겠습니까?

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}+\frac{1}{D}+\frac{1}{E}+\frac{1}{F}$$

〔풀이〕 방법1: 공식 $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$을 반복적으로 리용하면 결과를 얻을수 있습니다.

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$$

그러므로 $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}-\frac{1}{7}=\frac{1}{42}$,

$\frac{1}{42}-\frac{1}{43}=\frac{1}{1086}$, $\frac{1}{1086}-\frac{1}{1087}=\frac{1}{3263442}$,

$$\frac{1}{3263442}-\frac{1}{3263443}=\frac{1}{10650056950806}$$

A=3, B=7, C=43, D=1807, E=3263443, F=10650056950806 일 때 갈기식이 성립합니다.

즉 $\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{43}+\frac{1}{1087}+\frac{1}{3263443}+\frac{1}{10650056950806}$

이 방법에는 계산량이 너무 많으므로 다른 간편한 방법을 찾기로 합니다.

방법2: $\frac{1}{2}$의 분자, 분모에 2의 약수의 합 1+2를 동시에 곱하여 $\frac{1}{2}=\frac{1+2}{2\times(1+2)}$를 얻고 $\frac{1+2}{2\times(1+2)}$를 두 분수의 합으로 갈라 $\frac{1}{2}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}$을 얻습니다.

우에서와 같은 방법으로 $\frac{1}{3}$과 $\frac{1}{6}$을 두 분수의 합으로 고치면

$\frac{1}{3}=\frac{1+3}{3\times(1+3)}=\frac{1}{12}+\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}=\frac{1+2}{6\times(1+2)}=\frac{1}{18}+\frac{1}{9}$

$\frac{1}{4}$과 $\frac{1}{9}$을 두 분수의 합 $\frac{1}{4}=\frac{1+4}{4\times(1+4)}=\frac{1}{20}+\frac{1}{5}$, $\frac{1}{9}=\frac{1+3}{9\times(1+3)}=\frac{1}{36}+\frac{1}{12}$로 고칩니다. 그러면 $\frac{1}{12}$이 두번 나타나므로 요구를 만족시키지 못합니다.

그러므로 $\frac{1}{18}$을 두 분수의 합 $\frac{1}{18}=\frac{1+2}{18\times(1+2)}=\frac{1}{54}+\frac{1}{27}$로 고칩니다.

따라서 A=5, B=9, C=12, D=20, E=27, F=54일 때 갈기식이 성립됩니다.

즉 $\frac{1}{2}=\frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{27}+\frac{1}{54}$

〔례6〕 $\frac{1}{10^2}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{12^2}+\cdots+\frac{1}{1000^2}$의 오차가 0.006보다 작은 근사값은 얼마입니까?

〔풀이〕 이 분수의 오차가 0.006보다 작은 근사값을 구하려면 먼저 이 분수중의 매개 더하는수가 취하는 값의 범위를 구하고 다음에 이 분수가 취하는 값의 범위를 구합니다.

$$\frac{1}{10^2}=\frac{1}{10\times10}<\frac{1}{9\times10},$$

$$\frac{1}{11^2}=\frac{1}{11\times11}<\frac{1}{10\times11},$$

$$\frac{1}{12^2}=\frac{1}{12\times12}<\frac{1}{11\times12}$$

…

$$\frac{1}{1000^2}=\frac{1}{1000\times1000}<\frac{1}{999\times1000}$$

그러므로 $\frac{1}{10^2}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{12^2}+\cdots+\frac{1}{1000^2}<\frac{1}{9\times10}+\frac{1}{10\times11}+$ $+\frac{1}{11\times12}+\cdots+\frac{1}{999\times1000}$입니다.

$$\frac{1}{9\times10}+\frac{1}{10\times11}+\frac{1}{11\times12}+\cdots+\frac{1}{999\times1000}=$$

$$=\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{999}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{1000}\right)=\frac{1}{9}-\frac{1}{1000}=$$

$=0.1101<0.111$

그러므로 $\frac{1}{10^2}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{12^2}+\cdots+\frac{1}{1000^2}<0.111$

또한 $\frac{1}{10^2}=\frac{1}{10\times10}>\frac{1}{10\times11}$

$\frac{1}{11^2}=\frac{1}{11\times11}>\frac{1}{11\times12}$

$\frac{1}{12^2}=\frac{1}{12\times12}>\frac{1}{12\times13}$

…

$\frac{1}{1000^2}=\frac{1}{1000\times1000}>\frac{1}{1000\times1001}$

그러므로 $\frac{1}{10^2}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{12^2}+\cdots+\frac{1}{1000^2}>$

$>\frac{1}{10\times11}+\frac{1}{11\times12}+\frac{1}{12\times13}+\cdots+\frac{1}{1000\times1001}$

$\frac{1}{10\times11}+\frac{1}{11\times12}+\frac{1}{12\times13}+\cdots+\frac{1}{1000\times1001}=$

$=(\frac{1}{10}-\frac{1}{11})+(\frac{1}{11}-\frac{1}{12})+(\frac{1}{12}-\frac{1}{13})+\cdots+$

$+(\frac{1}{1000}-\frac{1}{1001})=$

$=\frac{1}{10}-\frac{1}{1001}=0.0990009>0.099$

그러므로 $\frac{1}{10^2}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{12^2}+\cdots+\frac{1}{1000^2}>0.099$

따라서 $0.099<\frac{1}{10^2}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{12^2}+\cdots+\frac{1}{1000^2}<0.111$

그런데 $0.111-0.099=0.012$

그러므로 $\frac{1}{10^2}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{12^2}+\cdots+\frac{1}{1000^2}$의 근사값을 취하면

$\frac{1}{2}\times(0.099+0.111)=0.105$

이때의 오차는 $0.012\div2=0.006$보다 작습니다.

련습 11－2

1. 다음 식을 계산하시오.

(1) $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{12}-\frac{1}{20}-\frac{1}{30}$

(2) $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{49\times50}$

(3) $1+2\frac{1}{8}+3\frac{1}{12}+4\frac{1}{20}+5\frac{1}{30}+6\frac{1}{42}+7\frac{1}{58}+8\frac{1}{72}+9\frac{1}{90}$

(4) $\frac{7}{3\times4}+\frac{7}{4\times5}+\frac{7}{5\times6}+\cdots+\frac{7}{99\times100}$

(5) $\frac{1}{10\times12}+\frac{1}{12\times14}+\frac{1}{14\times16}+\frac{1}{16\times18}$

(6) $\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{4\times6}+\frac{1}{6\times8}+\cdots+\frac{1}{48\times50}$

2. 다음 식을 계산하시오.

(1) $\frac{4}{1\times5}+\frac{4}{5\times9}+\frac{4}{9\times13}+\frac{4}{13\times17}+\frac{4}{17\times21}$

(2) $\frac{5}{2093}-\frac{2}{3059}-\frac{1}{1729}$

(3) $\frac{4}{3}+\frac{16}{15}+\frac{36}{35}+\frac{64}{63}+\frac{100}{99}+\frac{144}{143}+\frac{196}{195}+\frac{256}{255}$

(4) $\frac{1997}{1998}+\frac{998}{999}+\frac{665}{666}-\frac{332}{333}$

(5) $1-\frac{2}{3}-\frac{2}{9}-\frac{2}{27}-\frac{2}{81}-\frac{2}{243}-\frac{2}{729}$

3. 다음 식을 계산하시오.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{1}{60}+\frac{2}{60}+\frac{3}{60}+$$
$$+\cdots+\frac{59}{60}$$

4. 다음 식을 계산하시오.

$$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\cdots+\frac{1}{98\times99\times100}$$

5. 다음 식을 계산하시오.

$$\frac{3}{2\times5}+\frac{2}{5\times7}+\frac{4}{7\times11}+\frac{5}{11\times16}+\frac{6}{16\times22}+\frac{7}{22\times29}+$$
$$+\frac{1}{29}$$

6. 다음 식을 계산하시오.

$$\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{21}+\frac{1}{31}+\frac{1}{41}\right)\times\left(\frac{1}{21}+\frac{1}{31}+\frac{1}{41}+\frac{1}{51}\right)-$$
$$-\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{21}+\frac{1}{31}+\frac{1}{41}+\frac{1}{51}\right)\times\left(\frac{1}{21}+\frac{1}{31}+\frac{1}{41}\right)$$

7. 조건 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{2001}$($a$, b는 서로 다른 두 네자리수)를 만족시키는 a, b의 값을 쓰시오.

8. 다음 문제를 계산하시오.

(1) $1\frac{1}{2}+2\frac{1}{3}+3\frac{1}{4}+4\frac{1}{5}+5\frac{1}{6}+6\frac{1}{7}+7\frac{1}{8}$

(2) $1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+10}$

(3) $1\frac{1}{1024}+2\frac{1}{512}+4\frac{1}{256}+\cdots+256\frac{1}{4}+512\frac{1}{2}$

9. 다음 문제를 계산하시오.

(1) $(1+\frac{1}{2})\times(1-\frac{1}{2})\times(1+\frac{1}{3})\times(1-\frac{1}{3})\times\cdots\times$

$\times(1+\frac{1}{99})\times(1-\frac{1}{99})$

(2) $1+3\frac{1}{6}+5\frac{1}{12}+7\frac{1}{20}+9\frac{1}{30}+11\frac{1}{42}+13\frac{1}{56}+15\frac{1}{72}+$

$+17\frac{1}{90}$

(3) $(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{60})+(\frac{2}{3}+\frac{2}{4}+\cdots+\frac{2}{60})+(\frac{3}{4}+$

$+\frac{3}{5}+\cdots+\frac{3}{60})+\cdots+(\frac{58}{59}+\frac{58}{60})+\frac{59}{60}$

10. $\frac{1}{3}+\frac{3}{4}+\frac{2}{5}+\frac{5}{7}+\frac{7}{8}+\frac{9}{20}+\frac{10}{21}+\frac{11}{24}+\frac{19}{35}$를 계산하시오.

제12장 추리와 원리

제1절 론리적추리문제

론리적추리문제라는것은 량적관계를 주지 않거나 아주 적게 준 기초에서 그 해결방법이 수학개념, 법칙, 공식에 의한 계산이나 전문적인 수학지식에 의한것이 아니라 문제의 조건과 결론사이의 론리적관계에 의하여 추리하고 정확한 판단을 함으로써 옳은 결론을 얻어내는 방법을 말합니다.

중 점

1. 론리적문제의 류형에 대하여 알고 론리적문제를 푸는 기본규칙과 방법을 습득하여야 합니다.
2. 엄밀한 론리성과 분석추리의 능력을 소유해야 합니다.

〔례1〕 길에 뻐스 5대가 한줄로 서있는데 매개 뻐스뒤에는 다 그 뻐스가 도착할 목적지의 표식이 붙어있습니다. 매 운전사는 5대가운데서 2대가 A도시로 가고 3대가 B도시로 간다는것을 알고 있으며 자기 앞의 뻐스의 표식만 볼수 있습니다. 지령원은 매 차가 어디로 가야 한다는것을 직접 알려주지 않고 그들자체로 정황에 따라 판단하게 하였습니다. 지령원이 먼저 세번째 운전사에게 자기의 차가 어디로 가는가를 추측하게 하였더니 그 운전사는 앞의 2대의 차의 표식을 보고 《모르겠다.》고 대답하였습니다. 지령원이 또 두번째 차의 운전사에게 물었더니 그 운전사는 첫번째 차의 표식과 세번째 운전사가 말한 《모르겠다.》는데 의

하여 여전히 모르겠다고 대답하였습니다. 그리고 첫번째 운전사는 두번째, 세번째 운전사의 《모르겠다.》는데 의하여 정확히 판단하고 자기의 목적지를 말하였습니다.

첫번째 차는 어느 도시로 달리겠습니까? 그는 어떻게 분석하였겠습니까?

〔**풀이**〕 세번째 운전사가 한 말과 《차 2대만 A도시로 간다.》는데 의하여 분석합니다.

세번째 운전사의 《모르겠다.》는것과 주어진 조건 즉 《2대만 A도시로 간다.》는 조건에 의하여 첫번째와 두번째 차는 동시에 A도시로 갈수 없습니다. 그렇지 않고 첫번째와 두번째 차가 동시에 A도시로 간다면 세번째 운전사는 자기 차가 B도시로 간다는 것을 즉시 알았을것입니다.

또 두번째 차의 운전사가 《모르겠다.》는데 의하여 첫번째 차는 꼭 A도시로 달리지 않습니다. 그렇지 않고 첫번째 차가 A도시로 달린다면 두번째 차는 꼭 B도시로 달린다는것을 알았을것입니다.

이상의 분석과 추리를 거쳐 첫번째 차의 운전사는 자기의 차가 B도시로 달려야 한다는것을 판단한것입니다.

〔**례2**〕 선생님이 붉은 모자 3개와 흰 모자 2개를 가져온 다음 명호, 민구, 강호 차례로 세 학생을 한줄로 서게 하였습니다. 그리고 《너희들이 눈을 감으면 내가 너희들에게 모자 3개를 씌워주고 나머지 모자 두개는 내가 숨겨둔 다음 눈을 뜨라고 할 때 뜰수 있다.》고 말하였습니다. 선생님은 그들이 눈을 뜬 다음 뒤에 선 강호에게 《네가 쓴 모자의 색갈이 무엇이냐?》라고 물었는데 강호가 《모르겠습니다.》고 대답하였습니다. 선생님이 또 민구에게 물으니 자기가 쓴 모자의 색갈을 모르겠다고 대답하였습니다. 마지막으로 선생님이 제일 앞에 선 명호에게 물으니 명호는 좀 생각하고 《내가 쓴것은 붉은 모자입니다.》라고 대답하였습니다. 그러자 선생님은 《옳게 대답하였습니다.》라고 말하였습니다. 그러면 명호는 자기가 쓴것이 붉은 모자라는것을 어떻게 알았겠습니까?

〔**풀이**〕 문제에서의 《붉은것 3개, 흰것 2개》와 두번의 《모

르겠다.》는데 의하여 분석하고 추리합니다.

5개 모자중 붉은 모자가 3개이고 흰 모자가 2개이므로 명호와 민구가 쓴 모자의 색갈은 다음의 네가지경우가 있습니다. 즉 붉은것 붉은것, 붉은것 흰것, 흰것 붉은것, 흰것 흰것. 그런데 흰 모자는 2개이므로 만일 명호와 민구가 다 흰 모자를 썼다면 강호는 자기가 쓴것이 붉은 모자라는것을 알았을것입니다. 때문에 명호와 민구가 쓴 모자는 다 흰색이 아닙니다. 민구에게 물었을 때 민구도 이렇게 생각한것입니다.

이때 만일 민구가 명호가 쓴 모자가 흰 모자이면 자기가 쓴 모자는 붉은 모자라고 말했을것입니다. 그러나 민구는 모르겠다고 하였습니다. 이것은 명호가 머리에 쓴것이 흰모자가 아니라는것을 말해줍니다.

이로부터 명호는 자기가 쓴것이 붉은 모자라고 대답하였습니다.

〔례3〕 수학경연이 끝난 후 명호, 희순, 강호는 각각 메달을 탔는데 그중 한사람은 금메달을 타고 한사람은 은메달을 탔으며 다른 한사람은 동메달을 탔습니다. 이때 김선생님은 다음과 같이 추측하였습니다. 《명호가 금메달을 타고 희순이는 금메달을 타지 못했으며 강호는 동메달을 타지 못했다.》 만일 김선생님이 한명만 맞추었다면 명호, 희순, 강호는 각각 무슨 메달을 탔겠습니까?

〔풀이〕 명호가 세가지 메달을 각각 탔다고 가정하고 분석하면서 가능하게 나타날수 있는 경우를 생각하고 조건에 맞지 않는 것을 버립니다.

명호가 금메달을 탔다고 하면 희순이는 꼭 금메달을 타지 못합니다. 이것은 김선생님이 하나만 맞추었다는것과 모순되므로 조건에 맞지 않습니다.

명호가 은메달을 탔다고 할 때 희순이가 금메달을 탔다고 하면 강호는 동메달을 타게 되는데 이렇게 하면 김선생님은 하나도 맞춘것이 없게 되므로 조건에 맞지 않습니다. 만일 희순이가 동메달을 탔다고 하면 강호는 금메달을 타게 되는데 이것은 김선

생님이 두가지를 맞춘것이므로 역시 조건에 맞지 않습니다.

명호가 동메달을 탔다고 할 때 만일 희순이가 금메달을 탔다고 하면 강호는 은메달을 타게 됩니다. 그러면 김선생님은 강호가 메달을 탄 등수만 맞추게 되는데 이것은 조건에 맞습니다. 만일 희순이가 은메달을 탔다고 하면 강호는 금메달을 타게 되는데 이렇게 되면 김선생님은 두가지를 맞추는것으로 조건에 맞지 않습니다.

그러므로 명호, 희순, 강호는 각각 동메달, 금메달, 은메달을 탔습니다.

〔례4〕 빨간색, 노란색, 파란색, 흰색, 보라색 구슬이 각각 한개씩 있는데 이것을 종이봉지안에 넣고 상우에 한줄로 배렬해놓았습니다. 그리고 A, B, C, D, E 다섯사람이 각각 매개 봉지안의 구슬의 색갈을 알아맞추기 하는데 매 사람은 2개의 봉지에 대해서만 추측할수 있습니다.

A의 추측: 두번째 봉지는 보라색
세번째 봉지는 노란색
B의 추측: 두번째 봉지는 파란색
네번째 봉지는 빨간색
C의 추측: 첫번째 봉지는 빨간색
다섯번째 봉지는 흰색
D의 추측: 세번째 봉지는 파란색
네번째 봉지는 흰색
E의 추측: 두번째 봉지는 노란색
다섯번째 봉지는 보라색

다섯사람이 다 추측한 후 봉지안의 구슬을 검사해보니 매 사람은 다 한봉지만 옳게 맞추었습니다. 매 사람은 각각 어느 봉지를 옳게 맞추었습니까?

〔풀이〕 매 봉지는 한사람만이 옳게 맞추었다는데 의하여 C가 옳게 맞춘 첫번째 봉지를 분석추리하는 돌파구로 합니다.

주어진 조건에 의하여 다음과 같은 표를 만듭니다. (그림 5)

	1	2	3	4	5
A		보라색	노란색		
B		파란색		빨간색	
C	빨간색				흰색
D			파란색	흰색	
E		노란색			보라색

그림 5

매 봉지는 한사람만이 옳게 맞추었고 첫번째 봉지는 C만이 맞추었으므로 첫번째 봉지는 빨간색입니다. 또 매 사람이 한봉지만을 옳게 맞추었으므로 C가 다섯번째 봉지를 흰색이라고 말한것은 틀립니다. 다섯번째 봉지는 C, E 두사람만 추측하였으므로 E가 다섯번째 봉지를 보라색이라고 말한것은 맞습니다. 따라서 E가 두번째 봉지를 노란색이라고 말한것은 틀립니다. 보라색 구슬을 보면 A, E 두사람만 추측하였는데 여기서 A가 두번째 봉지를 보라색으로 한것은 틀립니다.

따라서 두번째 봉지를 A, B, E 세사람이 추측한 가운데서 A, E가 틀리게 말하였으므로 B가 두번째 봉지를 파란색이라고 한것은 옳습니다. 그러면 B가 네번째 봉지를 빨간색이라고 말한것은 틀리고 D가 세번째 봉지를 푸른색이라고 한것도 틀립니다.

그러므로 A가 세번째 봉지를 노란색이라고 말한것은 옳고 D가 네번째 봉지를 흰색이라고 말한것도 맞습니다.

우에서의 추리와 판단을 종합하면 A가 세번째 봉지를 노란색, B가 두번째 봉지를 푸른색, C가 첫번째 봉지를 빨간색, D가 네번째 봉지를 흰색, E가 다섯번째 봉지를 보라색이라고 말한것은 옳습니다.

〔례5〕 한 학급에 11명의 학생이 있는데 그들의 이름은 각각 A～K입니다. 이 학생들은 바른말을 하는 학생들과 거짓말을 하는

학생들로 나눌수 있습니다. 어느날 선생님이 《11명 가운데서 거짓말만 하는 학생은 몇명인가?》고 물었습니다. 그날 J와 K가 휴식하였는데 나머지 9명은 다음과 같이 대답하였습니다.

A: 《10명입니다.》
B: 《7명입니다.》
C: 《11명입니다.》
D: 《3명입니다.》
E: 《6명입니다.》
F: 《10명입니다.》
G: 《5명입니다.》
H: 《6명입니다.》
I: 《4명입니다.》

그러면 11명 학생들중 거짓말을 하는 학생은 몇명입니까?

〔**풀이**〕 9명중 7명이 모두 서로 다르게 말하였고 같은 대답을 한 사람은 2명이므로 거짓말을 하는 사람은 적어도 7명입니다.

만일 거짓말을 하는 사람을 7명이라고 하면 B가 7명이라고 말하였으므로 B는 바른말을 하였고 이와 다르게 대답한 8명은 다 거짓말을 한것으로 됩니다. 이것은 가정과 모순되므로 거짓말을 하는 사람은 7명이 아닙니다. 만일 거짓말을 하는 사람을 8명이라고 하면 물음에 대답한 9명이 다 거짓말을 하였습니다. 이것은 가정과 모순됩니다. 그러므로 거짓말을 하는 사람은 8명이 아닙니다.

만일 거짓말을 하는 사람이 10명이라고 하면 한사람만 바른말을 하는것으로 됩니다. 그런데 A와 F가 바른말을 한것으로 되는데 이것은 가정과 모순되므로 거짓말을 하는 학생은 10명이 아닙니다.

만일 거짓말을 하는 사람을 11명이라고 하면 바른말을 하는 학생은 없게 됩니다. 그런데 C가 바른말을 하였으므로(C는 11명이라고 대답하였습니다.) 가정과 모순됩니다. 그러므로 거짓말을 하는 학생은 11명이 아닙니다.

분명히 거짓말을 하는 학생은 9명인데 물음에 대답한 9명이 다 거짓말을 하고 휴식한 두 학생이 바른말을 합니다.

〔**례6**〕 어느 학교의 수학시험에 문제가 모두 6문제 나왔는데 다

판단문제였습니다. 여기서 자기가 옳다고 여기는것은 《○》로 표시하고 틀린것은 《×》로 표시합니다. 점수를 주는 방법은 한 문제를 맞추면 2점을 주고 대답하지 않으면 1점을 주며 틀리면 점수를 주지 않습니다.

A, B, C, D, E, F, G 학생 7명의 답안과 처음 학생 6명의 점수는 다음 표에서와 같습니다. G의 점수를 써넣으시오. (그림 6)

문제번호	A	B	C	D	E	F	G
1		○	○	○	×	×	○
2	○		×	×	○	×	×
3	○	×		○	×	×	×
4	○	○	×		×	○	○
5	○	×	○	○		×	○
6	○	○	×	×	×		×
점수	7	5	5	5	9	7	

그림 6

〔**풀이**〕 문제의 주어진 조건과 처음 6명의 점수에 의하여 B와 C의 4번, 5번, 6번에서의 서로 다른 표시와 B와 D의 3번, 5번, 6번에서의 서로 다른 표시를 찾아 비교하고 분석하면서 문제의 기본풀이를 이끌어갑니다.

먼저 B와 C를 비교하는데 4번, 5번, 6번에서 함께 각각 2점, 2점, 2점을 얻을수 있으므로 이들 두사람은 1번, 2번, 3번에서 모두 $10-(2+2+2)=4$(점)을 얻을수 있습니다. (그림 7)

문제번호	1	2	3	4	5	6	개인점수
B	○		×	○	×	○	5
C	○	×		×	○	×	5
합친 점수		1 또는 3	1 또는 3	2	2	2	10

그림 7

이제 1번의 답안을 분석합니다. 만일 B, C의 1번의 답안이 정확하다고 하면 B와 C는 1번에서 모두 4점을 얻어 두사람의 총점수가 적어도 12점으로 되여야 하는데 이것은 그들의 실제점수 2×5=10(점)과 맞지 않습니다. 그러므로 1번의 정확한 답은 ×입니다. 이밖에 2번, 3번의 정확한 답안은 다 ○일수도 없고 ×일수도 없습니다. 그렇지 않으면 두사람은 8점 또는 12점을 맞게 됩니다.

이제 B와 D를 비교합니다. 그들 두사람이 2번, 4번에서 맞은 점수는

(5+5)−(2+2+2+0)=4(점)입니다. (그림 8)

문제번호	1	2	3	4	5	6	개인점수
B	○		×	○	×	○	5
D	○	×	○		○	×	5
합친 점수	0	1 또는 3	2	1 또는 3	2	2	10

그림 8

여기서 2번, 4번의 정확한 답안이 다 ○이거나 ×일 때만이 두사람이 맞은 점수가 10점이라는데 맞으며 두사람은 함께 8점 또는 12점을 받게 됩니다.

E의 답을 보면 1번에서 2점을 맞고 2번, 4번에서 모두 2점을 맞았으므로 3번, 6번에서는 (9−1)−(2+2)=4(점)을 맞아야 합니다. 따라서 E의 3번, 6번의 답안은 정확한것으로서 다 ×입니다. 3번의 정확한 답안이 ×이므로 2번의 정확한 답안은 ○이며 또 4번의 정확한 답도 ○입니다.

지금까지 얻은 문제의 정확한 답을 차례로 쓰면 ×, ○, ×, ○, ?, ×입니다.

그리고 B가 5점을 맞았다는데로부터 5번의 정확한 답이 ○이라는것을 얻을수 있습니다. 그러면 문제의 정확한 답은 차례로 ×, ○, ×, ○, ○, ×입니다.

따라서 G의 점수는 다음과 같습니다. (그림 9)

문제번호	1	2	3	4	5	6	점수
정확한 답	×	○	×	○	○	×	
G	○	×	×	○	○	×	
점수	0	0	2	2	2	2	8

그림 9

련습 12－1

1. 공 2001개를 몇사람에게 똑같이 나누어주었는데 만일 한사람이 없으면 한사람에게 2개씩 더 나눠주고도 나머지가 있으며 한사람에게 3개씩 더 나눠주면 공의 개수가 부족합니다. 원래 매 사람에게 공을 몇개씩 나눠주었겠습니까?

2. 어느 한 학교에서 좋은 일을 한 학생을 표창하기 위해 A, B, C, D 네 학생을 찾아 누가 좋은 일을 했는가고 물었습니다.(한사람만 좋은 일을 하였습니다.) A는 말했습니다. 《B가 한것입니다.》 B가 말했습니다. 《D가 한것입니다.》 C가 말했습니다. 《내가 한것이 아닙니다.》 D가 말했습니다. 《B의 말은 틀립니다.》 이 4명의 학생가운데서 한 학생만이 옳은 말을 하였습니다. 좋은 일을 누가 하였습니까?

3. 리지영, 장영호, 홍대위 세 학생이 대학을 졸업한 후 서로 다른 직업을 가지였습니다. 세사람가운데 한명은 기자로 되였습니다. 어떤 사람이 그들의 직업을 물었습니다. 리지영은 《나는 기자입니다.》라고 말하고 장영호는 《나는 기자가 아닙니다.》라고 말하였으며 홍대위는 《리지영은 거짓말을 하였습니다.》라고 하였습니다. 그들 세사람중에 한명이 진짜입니다. 그러면 누가 기자이겠습니까?

4. 6개 축구팀이 련맹전을 합니다. 매 팀은 모든 팀과 한번씩 대전합니다. 만일 이기면 3점을 얻고 비기면 1점을 얻으며 지면 점수가 없습니다. 지금 이미 4번 경기를 하였습니다.(매개 팀이 4개 팀과 경기하였습니다.) 각 팀이 4번 경기에서 얻은 점수의 합은 모두 다릅니다. 총점이 세번째인 팀은 모두 7점을 얻

었습니다. 그리고 4번은 비겼습니다. 그러면 다섯번째인 팀이 최고로 얻을수 있는 점수는 몇점이고 최소로 얻을수 있는 점수는 얼마입니까?

5. A, B, C팀이 축구경기를 합니다. 매개 팀은 다른 두 팀과 각각 한번 경기합니다. 지금 다음과 같은것을 알고있습니다.

① B팀이 꼴을 넣은 총개수는 0이고 한번 비겼습니다.

② C팀이 꼴을 넣은 총개수는 1이고 꼴을 먹은 수는 2이며 1번 비겼습니다. 규정에 따라 이기면 2점을 얻고 비기면 1점을 얻으며 한번 지면 0점입니다. 그러면 A팀은 모두 몇점 얻었습니까?

6. 한 책꽂이의 우, 중간, 아래 세층에 책이 모두 384권 있습니다. 첫번에 웃층에서 책을 몇권 꺼내 중간층과 아래층에 놓았습니다. 놓은 책의 권수는 각각 원래의 중간층과 아래층의 책권수입니다. 두번째로 중간층에서 책 몇권을 꺼내 웃층과 아래층에 놓았습니다. 세번째로 아래층에서 책을 몇권 꺼내 웃층과 중간층에 놓았습니다. 놓는 방법은 앞에서와 같습니다. 세차례에 걸쳐 놓은 다음 세층에 있는 책은 같게 되였습니다. 그러면 책꽂이의 웃층에 책이 몇권 있었습니까?

7. A, B, C, D, E 5명중에서 일부 학생을 선발하여 야영을 보내는데 다음과 같은 조건을 만족시켜야 합니다.

① A와 B중에 오직 한사람만 갈수 있습니다.

② C와 E중에 적어서 한사람이 갈수 있습니다.

③ D가 간다면 B도 가야 합니다.

④ A와 C는 모두 가거나 모두 가지 못합니다.

⑤ E가 간다면 C와 D도 가야 합니다. 어느 학생이 갈수 있습니까?

8. 4개 축구팀이 련맹전을 합니다. 매 팀은 모든 팀과 한번씩 경기합니다. 비기면 매 팀이 1점을 얻고 이기면 3점을 얻으며 지면 0점입니다. 경기가 끝난 후 각 팀의 총점수는 련속된 4개의 자연수입니다. 1등에게 진 팀의 총점수는 얼마입니까?(리유를 설명하시오.)

9. 수학경연에 5문제가 나왔습니다.(만점은 100점이 아닙니다.)

영희는 1, 2, 3, 4번을 옳게 풀고 26점을 얻었으며 전희는 1, 2, 3, 5번을 옳게 풀고 25점을 얻었습니다. 순희는 1, 2, 4, 5번을 맞게 풀고 26점을 얻었고 리철이는 1, 3, 4, 5번을 맞게 풀고 27점을 얻었으며 주용이는 2, 3, 4, 5번을 맞게 풀고 28점을 얻었습니다. 그러면 오영이는 5문제를 모두 맞게 풀고 몇점을 얻었겠습니까?

10. 선수 10명이 장기경기를 합니다. 매번 경기마다 두명의 선수들이 대전합니다. 한번 이기면 1점을 얻고 비기면 0.5점을 얻으며 지면 점수가 없습니다. 경기결과 선수들이 얻은 점수는 각기 달랐습니다. 1등과 2등은 한번도 지지 않은 선수들이 차지했습니다. 1등과 2등을 한 두 선수의 총점수는 3등보다 10점 많습니다. 4등은 마지막 4명이 얻은 점수의 총합과 같습니다. 3등은 몇점입니까?

11. 마라손경기에 선수 100명이 참가했습니다. 경기에서는 옹근수 1부터 100까지의 번호가 찍힌 번호천을 매 선수들에게 나누어주었습니다. 선수들은 경기가 끝나면 자기의 번호천에 있는 수자와 결승선에 도착한 순서를 더하여 그 합을 바칩니다. 이렇게 바친 100개 수자의 마지막 두자리수자가 모두 다를수 있습니까? 있다 혹은 없다로 대답하시오. 그리고 리유를 정확히 설명하시오. (결승선에 동시에 도착한 선수는 없습니다.)

12. 학교에서 자연학과경연을 하는데 모두 10문제가 나왔습니다. 한 문제를 맞게 대답하면 10점을 얻고 틀리게 대답하거나 대답하지 못하면 점수가 없습니다. A, B, C 세 시험지와 얻은 점수에 근거하여 시험지 D의 점수를 추리하면 몇점입니까?(그림 10)

문제번호	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	점수
A	●	●	○	●	○	●	●	○	●	●	70
B	●	○	○	○	●	○	●	○	○	○	50
C	●	○	○	○	●	●	●	○	●	○	30
D	●	●	○	○	○	●	●	○	○	○	

그림 10

(●와 ○는 판단의 《옳음》, 《틀림》을 표시하는 부호입니다.)

제2절 서랍원리

서랍원리는 도이췰란드의 수학자 디리흘레가 제일 처음으로 발견하고 수론연구에 응용하였습니다.

서랍원리를 리용하면 겉보기엔 어려울듯한 일부 수학문제를 쉽게 풀수 있습니다.

중 점

1. 서랍원리의 의미를 잘 알아야 합니다.

2. 서랍을 만드는 방법과 서랍에 넣는 물체와의 관계를 잘 아는것입니다.

서랍원리를 리용하면 많은 재미있는 문제들을 해결할수 있습니다.

〔**례1**〕 어린이가 12명 있습니다. 사과를 그들에게 나누어주려고 하는데 사과 몇개씩 주어야 적어도 한 어린이가 2개 또는 2개이상의 사과를 가질수 있겠습니까?

〔**풀이**〕 12명 어린이를 서랍으로 보면 서랍원리에 의하여 사과수는 반드시 서랍개수보다 많아야 합니다.

12명 어린이를 12개 서랍으로 보고 사과를 물체로 보면 서랍원리 즉 물체의 개수가 반드시 서랍의 개수보다 많아야 한개 서랍에 두개 또는 그이상의 물체를 넣을수 있다는데 의하여 적어도 사과 13개를 어린이들에게 나누어주어야 한 어린이가 2개 또는 그이상의 사과를 가질수 있습니다.

〔**례2**〕 한 학급에 학생 59명이 있습니다. 그중 적어도 2명이 같은 주일에 생일이 있다는것을 설명하시오.

〔**풀이**〕 59명을 59개 물체로 보고 한주일을 한개 서랍으로 봅

니다. 그러면 1년이 52개 주일이므로 52개 서랍입니다.

1년에 모두 52개 주인데 여기에 59개 물체를 넣으므로 한개 서랍에는 적어도 2개 물체가 꼭 들어가게 됩니다. 즉 적어도 어느 한 주일에는 두 학생의 생일이 있습니다.

〔례3〕 길이가 1m인 선분우에 임의로 5개 점을 정하면 적어도 두 점사이의 거리는 25㎝보다 작다는것을 설명하시오.

〔풀이〕 길이가 1m인 선분에는 25㎝가 4개 들어있습니다. 즉 4토막이 있습니다. 이 4토막을 4개 서랍으로 보고 5개 점을 5개 물체로 봅니다.

그러면 5개 물체를 4개 서랍에 넣으므로 적어도 한개 서랍에는 2개 물체가 들어가게 됩니다. 즉 한개 토막에 적어도 2개 점이 있게 됩니다. 그러면 그 두 점사이의 거리는 25㎝보다 작게 되므로 문제의 결론이 얻어집니다.

〔례4〕 어린이 5명이 각각 검은 바둑알과 흰 바둑알이 들어있는 주머니안에서 임의로 바둑알을 3개 꺼냅니다. 이 5명 어린이중 적어도 두 어린이가 꺼낸 바둑알의 색갈조합이 갈다는것을 증명하시오.

〔풀이〕 서랍원리에 의하여 다섯 어린이를 5개 물체로 볼수 있지만 서랍이 없습니다. 그러므로 먼저 바둑알 세개의 색갈은 몇가지 색갈조합으로 될수 있는가를 봅니다. 즉 서랍의 개수입니다.

바둑알 3개의 색갈로는 검은것 3개, 검은것 2개 흰것 1개, 검은것 1개 흰것 2개, 흰것 3개의 네가지 색갈조합을 만들수 있습니다. 이것을 4개의 서랍으로 봅니다.

매 어린이가 꺼낸 바둑알 3개를 한조로 하면 물체는 모두 5개입니다.

그러면 매 어린이가 꺼낸 바둑알 3개를 색갈조합에 따라 해당한 서랍안에 넣는것으로 됩니다. 이때 물체 5개가 서랍의 개수보다 많으므로 서랍원리에 의하여 적어도 두 물체는 한 서랍안에 들어가게 됩니다.

〔례5〕 1부터 20까지의 20개 자연수에서 임의로 11개 수를

취할 때 그가운데는 꼭 한수가 다른 수의 배수가 되는 두 수가 있다는것을 증명하시오.

〔**풀이**〕 이제 20개 수를 다음과 같이 10개 조로 나누고 열개 서랍으로 봅니다. 1, 2, 4, 8, 16; 3, 6, 12; 5, 10, 20; 7, 14; 9, 18; 11; 13; 15; 17; 19

이 10개 조의 20개 수에서 11개 수를 취하면 서랍원리에 의하여 적어도 두 수는 같은 한개 서랍에서 취하게 됩니다. 그러면 동일한 두 수는 배수관계를 가지고있으므로 그 두 수에서 한 수는 꼭 다른 한 수의 배수입니다.

〔**례6**〕 학교에 축구공, 배구공, 롱구공을 많이 실어왔습니다. 66명 학생들을 보내여 공을 가져오게 하였는데 매 학생은 적어도 공 한개를 가져와야 하고 많아서 공 2개를 가져와야 합니다. 그러면 적어도 몇명 학생이 가져온 공의 종류가 완전히 같겠습니까?

〔**풀이**〕 서랍원리에 의하여 66명 학생을 물체로 보고 공을 가져오는 방식을 서랍으로 보는데 가져오는 공의 방식에는 다음과 같은 9가지가 있습니다.

축; 배; 롱; 축, 축; 배, 배; 롱, 롱; 축, 롱; 배, 롱; 축, 배.

이 9가지 방식을 9개 서랍으로 보면 $66\div9=7\cdots3$이므로 적어도 $7+1=8$명 학생이 가져온 공의 종류가 완전히 같습니다.

〔**례7**〕 주머니안에 빨간색, 노란색, 흰색, 검은색양말이 각각 10짝씩 있습니다. 이때 눈으로 보지 않고 손으로 만져 주머니에서 양말 몇짝을 꺼내야 양말 5컬레를 맞출수 있겠습니까?(한컬레는 같은 색갈의 양말 두짝을 가리킵니다.)

〔**풀이**〕 빨간색, 노란색, 흰색, 검은색양말을 4개의 서랍으로 봅니다. 5컬레를 맞추려면 $4\times3+1=13$(짝)만 꺼내면 됩니다. 즉 적어도 13짝을 꺼내야 5컬레로 짝을 맞출수 있습니다.

〔**례8**〕 한 통안에 1—100까지의 번호를 단 카드가 있습니다. 그러면 한사람이 이 통안에서 임의로 카드를 꺼낼 때 꺼낸 카드가운데서 두 수의 차가 5가 되는 카드가 적어도 두장 있게 하려면 통

안에서 카드를 적어도 몇장 꺼내야 합니까?

〔**풀이**〕 꺼낸 몇장의 카드를 물체로 보고 번호가 1－100인 100장의 카드를 두 수의 차가 5가 되게 두장씩 분류하여 50개 서랍을 만들면 서랍원리를 리용하여 문제를 풀수 있습니다.

먼저 카드 100장을 다음과 같이 분류합니다.

1, 6; 11, 16; 21, 26; 31, 36; …; 81, 86; 91, 96

2, 7; 12, 17; 22, 27; 32, 37; …; 82, 87; 92, 97

3, 8; 13, 18; 23, 28; 33, 38; …; 83, 88; 93, 98

4, 9; 14, 19; 24, 29; 34, 39; …; 84, 89; 94, 99

5, 10; 15, 20; 25, 30; 35, 40; …; 85, 90; 95, 100

이와 같이 모두 50개 류형이므로 나누면 매개 류형의 두 수의 차가 다 5입니다. 이 50개 류형을 50개 서랍으로 보고 이 50개 서랍에서 51개 수를 꺼내면 같은 서랍안의 두 수의 차는 꼭 5입니다.

그러므로 1－100의 100장 카드가 들어있는 통안에서 임의로 카드를 꺼낼 때 꺼낸 카드가운데 두 수의 차가 5가 되는 카드가 적어도 2장 있게 하려면 카드를 51장 꺼내야 합니다.

련습 12－2

1. 10부터 20까지의 11개 자연수에서 임의로 12개 수를 취하였을 때 그중에는 두 수의 차가 1이 되는 두 수가 꼭 있다는것을 밝히시오.

2. 1, 2, 3, …20의 20개 수에서 임의로 12개 수를 취하였을 때 그중에는 두 수의 차가 11이 되는 두 수가 꼭 있다는것을 밝히시오.

3. 바둑선수 20명이 련맹전(즉 한 선수가 기타 선수와 한번씩 겨루어보는 경기형식)으로 경기를 진행합니다. 경기과정에 매 선수들이 진행한 경기회수를 알아보고 그중에서 진행한 경기회수가 같은 두 선수가 꼭 있다는것을 밝히시오.

4. 수학경연에서 등수에 당선된 87명 학생이 12개 학교에서

왔습니다. 그렇다면 적어도 그중의 8명 학생은 한 학교에서 왔다는것을 밝히시오.

5. 길이가 1m되는 선분우에 임의로 7개 점을 정하였습니다. 점을 어떻게 정하든지 적어도 두 점사이의 거리는 17㎝보다 작다는것을 밝히시오.

6. 2×9인 직4각형모양의 매개 네모칸을 빨간색, 흰색의 두가지 색갈중의 어느 한가지로 색칠합니다. 적어도 3개 렬의 색갈이 완전히 같다는것을 밝히시오.

7. 3×n인 직4각형모양의 매개 네모칸을 빨간색, 흰색, 노란색의 세가지 색갈중의 어느 한가지로 색칠합니다. n이 얼마일 때 적어도 2개 렬의 색칠방식이 완전히 같겠습니까?

8. 어느 한 학교의 6학년에 3개 반이 있습니다. 수학경연을 진행하는데 등수에 든 4명이 같은 반이 되려면 적어서 몇명이 등수에 들어야 하겠습니까?

9. 검은색, 흰색, 노란색저가락이 8개씩 있습니다. 캄캄한 밤에 이 저가락중에서 색갈이 다른 저가락을 두조(매 조의 저가락 두대는 색갈이 같아야 합니다.)를 꺼내자면 적어도 몇개의 저가락을 쥐여야 하겠습니까?

10. 유치원어린이들에게 과일을 나누어줍니다. 과일에는 사과, 배, 귤 세가지가 있습니다. 만일 매 어린이가 임의로 두알 가진다면 적어서 몇명 어린이가 가져간 후에야 두 어린이가 가지는 과일이 같은것이겠습니까?

11. 주패에는 54장 있습니다. 제일 적어서 몇장 뽑아야 그가운데 2장의 수자가 같겠습니까?

12. 4학년의 165명 학생이 롱구, 축구, 탁구 세가지 체육활동중에 한가지, 두가지 또는 세가지에 참가합니다. 그가운데 같은 체육활동에 참가하는 학생은 적어서 몇명이겠습니까?

13. 수자 1, 2, 3, …, 50이 있는데 이 50개 수중에서 몇개 수를 뽑되 그중의 임의의 두 수의 합이 모두 7로 완제되지 않게 하려면 가장 많아서 몇개 뽑아야 하겠습니까?

제3절 포함배제원리

중 점

1. 포함배제원리의 의미를 정확히 알아야 합니다.

2. 문제의 뜻을 정확히 분석하고 추리와 계산을 결합하여 문제를 풀어야 합니다.

〔례1〕 1부터 100까지의 옹근수가운데서 2로 완제되거나 3으로 완제되는 옹근수는 모두 몇개입니까?

〔풀이〕 그림 11에서 A는 2로 완제되는 수를 표시하고 B는 3으로 완제되는 수를 표시하며 A와 B의 공통부분 C는 2로도 완제되고 3으로도 완제되는 수 즉 6으로 완제되는 수를 표시합니다.

그림 11

100÷2=50이므로 1부터 100까지에는 2의 배수가 50개 있습니다.

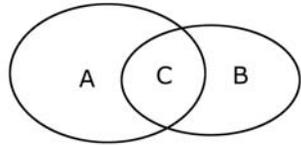
100÷3=33…1이므로 1부터 100까지에는 3의 배수가 33개 있습니다.

100÷6=16…4이므로 1부터 100까지에는 6의 배수가 16개 있습니다.

50+33−16=67(개)

답: 1부터 100까지의 옹근수에는 2의 배수이거나 3의 배수인 수가 67개 있습니다.

〔례2〕 1～100의 옹근수에는 5의 배수도 아니고 6의 배수도 아닌 수가 모두 몇개 있습니까?

〔풀이〕 1～100까지의 옹근수에서 5의 배수와 6의 배수를 지워버리면 나머지수가 5의 배수도, 6의 배수도 아닌 즉 문제에서 요구하는 수입니다.

1～100에서 5의 배수는 A＝100÷5＝20(개)입니다.

100÷6＝16…4이므로 1～100에서 6의 배수는 16개입니다.

100÷30＝3…10이므로 1～100에서 30의 배수는 3개입니다.

그러므로 1～100에서 5의 배수 또는 6의 배수는 20＋16－3＝
＝33(개)입니다.

100－33＝67(개)

답: 1～100까지의 옹근수에서 5의 배수도, 6의 배수도 아닌 수는 모두 67개입니다.

〔례3〕 1～500에서 2로도 3으로도 7로도 완제되지 않는 수는 모두 몇개입니까?

〔풀이〕 1～500까지의 옹근수에서 2로 3으로 7로 완제되는 수를 없애버리면 그 수들이 구하려는 수들입니다.

2로 완제되는 수는 $\left[\frac{500}{2}\right]=250$(개)

3으로 완제되는 수는 $\left[\frac{500}{3}\right]=166$(개)

7로 완제되는 수는 $\left[\frac{500}{7}\right]=71$(개)

2, 3으로 완제되는 수는 $\left[\frac{500}{2\times3}\right]=83$(개)

2로도 완제되고 7로도 완제되는 수는

$$\left[\frac{500}{2\times7}\right]=35(\text{개})$$

3으로도 완제되고 7로도 완제되는 수는

$$\left[\frac{500}{3\times7}\right]=23(\text{개})$$

2, 3, 7로 동시에 완제되는 수는

$$\left[\frac{500}{2\times3\times7}\right]=11(\text{개})$$

1～500에서 2, 3, 7로 완제되는 수는

$$250+166+71-(83+35+23)+11=357(\text{개})$$

1～500에서 2, 3, 7로 완제되지 않는 수는

$$500-357=143(\text{개})$$

답: 1～500에서 2, 3, 7로 완제되지 않는 수는
143개입니다.

〔례4〕 학생 50명이 있는데 그들이 입은 바지는 검은색이거나 흰색이고 웃옷은 푸른색이거나 붉은색입니다. 지금 14명은 푸른색 웃옷에 흰색 바지를 입었고 31명은 검은색 바지를 입었으며 18명은 붉은색 웃옷을 입었습니다. 그러면 붉은색 웃옷에 검은색 바지를 입은 학생은 몇명입니까?

〔풀이〕 먼저 흰색 바지에 푸른색 웃옷이나 붉은색 웃옷을 입은 학생수를 구하고 다음에 흰색 바지에 붉은색 웃옷을 입은 수를 구하며 마지막에 붉은색 웃옷에 검은색 바지를 입은 수를 구합니다.

흰색 바지에 푸른색 웃옷이거나 붉은색 웃옷을 입은 수는

$$50-31=19(\text{명})$$

흰색 바지에 붉은색 웃옷을 입은 수는

$$19-14=5(\text{명})$$

붉은색 웃옷에 검은색 바지를 입은 수는

$$18-5=13(\text{명})$$

답: 붉은색 웃옷에 검은색 바지를 입은 수는
13명입니다.

련습 12-3

1. 선수 36명이 륙상경기대회에 참가하였는데 매 선수는 적어도 두가지 경기에 참가합니다. 10명 선수가 뛰기경기에 참가하지 않았고 던지기경기와 달리기 및 뛰기경기에 참가한 선수는 각각 22명입니다. 뛰기와 던지기 두개 경기에만 참가한 선수는 몇명입니까?

2. 그림 12에서와 같이 면적이 각각 24㎠되는 원모양의 종이

3장을 책상우에 펴놓았습니다. 3장의 종이가 다 겹친 면적은 6㎠이고 3장의 종이가 덮고있는 총 면적은 48㎠입니다. 그림에서 빗선을 친 부분은 몇㎠입니까?

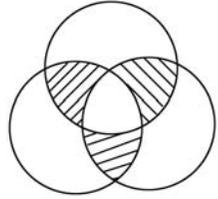



그림 12

3. 학교에서 조직한 수학경연에 A, B, C 3개 문제가 나왔는데 한 문제를 맞게 푼 학생은 40명입니다. 그중 문제 A를 맞게 푼 학생은 15명이고 문제 B를 맞게 푼 학생은 20명이며 문제 C를 맞게 푼 학생은 25명입니다. 세 문제를 다 맞게 푼 학생이 2명뿐이라면 두 문제만 맞게 푼 학생은 몇명입니까? 한 문제만 맞게 푼 학생은 몇명입니까?

4. 어떤 학교에서 수학경연에 참가한 남학생은 120명이고 녀학생은 80명입니다. 국어경연에 참가한 녀학생은 120명, 남학생은 80명입니다. 이 학교에서 경연에 참가한 학생은 모두 260명입니다. 그가운데서 남학생 75명은 두 학과목경연에 다 참가하였습니다. 그러면 수학경연에만 참가하고 국어경연에 참가하지 않은 녀학생 수는 얼마입니까?

5. 1부터 1998까지의 자연수중에서 2로는 완제되지만 3 또는 7로 완제되지 않는 수의 개수는 얼마입니까?

6. 어느 한 학교의 5학년 1반에서 수학경연에 참가한 학생은 32명이고 영어경연에 참가한 학생은 27명이며 국어경연에 참가한 학생은 22명입니다. 그가운데 수학과 영어 두 학과목경연에 참가한 학생은 12명이고 영어와 국어 두 학과목경연에 참가한 학생은 14명이며 수학과 국어 두 학과목경연에 참가한 학생은 10명입니다. 그러면 5학년 1반은 모두 몇명입니까?

7. 김선생님은 수학문제 두 문제를 냈습니다. 학급의 40명가운데서 첫번째 문제를 맞게 푼 학생은 30명이고 두번째 문제는 12명이 틀리게 풀었고 두 문제를 다 맞게 푼 학생은 20명입니다.

(1) 두번째 문제를 맞게 풀고 첫번째 문제를 틀리게 푼 학생은 몇명입니까?

(2) 두 문제를 다 틀리게 푼 학생은 몇명입니까?

8. 분모가 385인 가장 간단한 참분수는 모두 몇개입니까? 그것들의 합은 얼마입니까?

9. 어느 한 학교의 5학년에는 학생이 모두 110명 있습니다. 이 학생들은 문학, 수학, 영어소조에 다닙니다. 매 학생은 적어도 한개 소조에 다닙니다. 문학소조에 다니는 학생은 16명이고 영어소조에 다니는 학생은 61명이며 영어소조에만 다니는 학생은 15명이고 수학소조에 다니는 학생은 63명이며 수학소조에만 다니는 학생은 21명입니다. 그러면 세개 소조에 다 다니는 학생은 몇명입니까?

10. 어느 한 학교의 4학년 1반에는 학생이 50명 있습니다. 국어경연에 참가한 학생은 28명이고 수학경연에 참가한 학생은 23명이며 영어경연에 참가한 학생은 20명입니다. 매 학생은 많아서 두개 학과목경연에 참가할수 있습니다. 두개 학과목경연에 참가한 학생은 가장 많아서 몇명입니까?

제13장 직6면체와 바른6면체

제1절 겉면적의 계산

직6면체 또는 바른6면체의 겉면적이란 6개 면의 면적을 말합니다. 직6면체의 길이를 a, 너비를 b, 높이를 h로 표시하면 직6면체의 겉면적$=(ab+ah+bh)\times 2$이고 바른6면체의 한 변의 길이를 a로 표시하면 바른6면체의 겉면적$=6a^2$입니다. 그러면 몇개의 직6면체 또는 바른6면체로 이루어진 립체의 겉면적을 어떻게 계산하겠습니까? 이것이 바로 이 절에서 중점으로 해결해야 할 문제입니다.

중 점

1. 직6면체, 바른6면체의 겉면적을 구하는 공식을 능란하게 리용하여 그 겉면적을 계산할수 있어야 합니다.
2. 복잡한 형태를 가진 립체도형의 겉면적을 정확히 구할줄 알아야 합니다.
3. 깐깐히 관찰하고 계산하는 습관을 붙이며 공간상상력을 키워야 합니다.

〔례1〕 그림 13은 작은 바른6면체로 이루어졌습니다. 이 도형이 모두 몇개로 되였는지 세여보고 계산하시오.

〔풀이〕 방법1: 우로부터 아래로 셉니다.

1층; 1개

2층; 1층의 1개에 2층의 《눈에 보이는》 3개를 더하면 2층의 개

수는 1+3=4(개)

3층; 2층의 4개에 3층의 《눈에 보이는》 5개를 더하면 3층의 개수는 4+5=9(개)

4층; 3층의 9개에 4층의 《눈에 보이는》 7개를 더하면 4층의 개수는 9+7=16(개)

따라서 총개수는

1+4+9+16=30(개)

그림 13

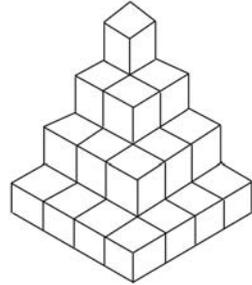
방법2: 웃층으로부터 매 층의 작은 바른 6면체의 개수는

1층; 1개

2층; 2×2=4(개)

3층; 3×3=9(개)

4층; 4×4=16(개)

따라서 총개수는

1+4+9+16=30(개)

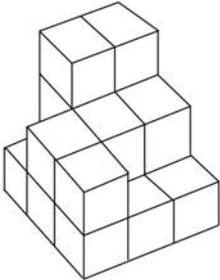



그림 14

〔례2〕 그림 14는 변의 길이가 1㎝인 바른6면체 17개로 이루어졌습니다. 그 겉면적을 구하시오.

〔풀이〕 만일 한개씩 계산하면 답을 구할수 있으나 아주 까다로우며 또 틀리기 쉽습니다.

자세히 관찰하면 이 도형의 아래우 두 면의 면적은 같다는것을 알수 있습니다.

우에서 보면 그림 15의 (1)에서와 같이 변의 길이가 3㎝인 바른6면체와 같은데 그 면적은 3×3=9(㎠)입니다.

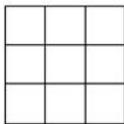
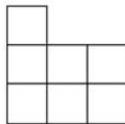
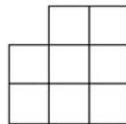



그림 15

이 립체도형의 좌우 두 면의 면적도 같은데 왼쪽에서 보면 그림 15의 (2)와 같으며 그 면적은 1×1×7=7(㎠)입니다.

이 립체도형의 앞뒤 두 면의 면적도 같은데 앞에서 보면 그림 15의 (3)과 같으며 그 면적은 1×1×8=8(㎠)입니다.

그러므로 이 립체도형의 겉면적은

$$(9+7+8)\times 2=48(㎠)$$

답: 이 립체도형의 겉면적은 48㎠입니다.

〔례3〕 길이가 6㎝이고 너비가 4㎝이며 높이가 3㎝인 직6면체의 6개 면에 붉은 색칠을 하고 이 직6면체를 변의 길이가 1㎝인 작은 바른6면체가 되게 잘랐습니다. 그러면 두개 면이 붉은색인 작은 바른6면체는 몇개이겠습니까?(그림 16)

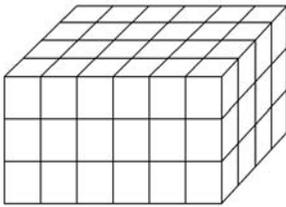



그림 16

〔풀이〕 네 길이의 량쪽에 두 면이 붉은색인 작은 바른6면체가 각각 4개씩 있고 네개의 너비의 량쪽에 두 면이 붉은색인 작은 바른6면체가 각각 2개씩 있으며 네개의 높이의 량쪽에 두 면이 붉은색인 작은 바른6면체가 각각 1개씩 있습니다.

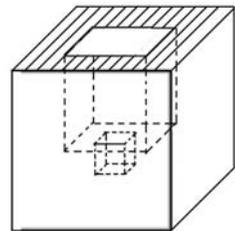
그러므로 두 면이 붉은색인 작은 바른6면체의 총개수는

$$〔(6-2)+(4-2)+(3-2)〕\times 4=28(개)$$

답: 두개 면이 붉은색인 작은 바른6면체는 28개 있습니다.

〔례4〕 그림 17은 한 변의 길이가 2㎝인 바른6면체인데 웃면의 중심에서 한 변의 길이가 1㎝인 바른6면체를 따내고 또 따낸 바른6면체모양의 밑면의 중심에서 한 변의 길이가 0.5㎝인 바른6면체를 따낸것입니다.

그림 17

세번째도 앞의 두개의 바른6면체를 따낸 것과 마찬가지로 한 변의 길이가 0.25㎝인 바른6면체를 따냈습니다. 그러면 이 도형의 겉면

적은 얼마입니까?

〔**풀이**〕 이 문제의 어려움은 따낸 바른6면체의 겉면적을 구하기 쉽지 않다는것입니다. 따낸 구멍안에서 아래와 우의 겉면에 평행인 모든 면의 면적의 합은 변의 길이가 1㎝인 바른4각형의 면적과 같습니다.

그리고 변의 길이가 1㎝인 바른4각형과 그림에서 빗선을 친 부분의 면적을 더한것은 변의 길이가 2㎝인 바른6면체의 웃면의 겉면적과 같습니다.

이제 립체도형의 겉면적을 두 부분으로 나눕니다.

아래면과 웃면의 면적은 변의 길이가 2㎝인 두 바른4각형의 면적과 같습니다.

$$2\times2\times2=8(\text{cm}^2)$$

옆면적은 변의 길이가 각각 2㎝, 1㎝, 0.5㎝, 0.25㎝인 4개의 바른4각형의 면적의 합과 같습니다.

$$2\times2\times4=16(\text{cm}^2)$$
$$1\times1\times4=4(\text{cm}^2)$$
$$0.5\times0.5\times4=1(\text{cm}^2)$$
$$0.25\times0.25\times4=0.25(\text{cm}^2)$$

이 립체도형의 겉면적은

$$8+16+4+1+0.25=29.25(\text{cm}^2)$$

답: 립체도형의 겉면적은 29.25㎠입니다.

〔**례5**〕 한 변의 길이가 1㎝인 바른6면체 19개를 쌓아올려 그림 18과 같이 립체도형을 만들었습니다. 이 립체도형의 겉면적을 구하시오.

〔**풀이**〕 아래우, 옆면, 앞뒤로 보았을 때의 평면도형은 각각 아래의 세 그림과 같습니다.(그림 19)

그러므로 이 립체도형의 겉면적은 2×(웃면의 면적+왼쪽면의 면적+앞면의 면적)입니다.

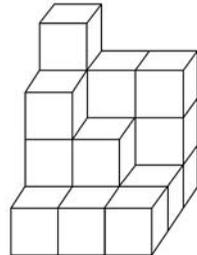



그림 18

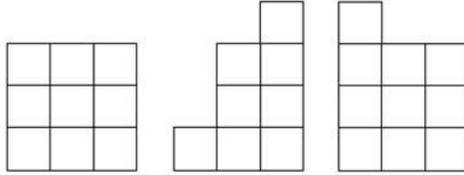



그림 19

웃면의 면적은 9㎠이고 왼쪽면의 면적은 8㎠이며 앞면의 면적은 10㎠입니다. 그러므로 이 립체도형의 겉면적은

$$(9+8+10)\times2=54(㎠)$$

답: 이 립체도형의 겉면적은 54㎠입니다.

〔례6〕 한 변의 길이가 1m인 바른6면체의 나무토막을 가로방향으로 3개로 자르고 또 매 토막을 임의의 크기로 4개로 잘랐으며 그 토막을 또 임의의 크기로 5토막으로 잘라 크고작은 직6면체 60개를 얻었습니다. 이 60개의 직6면체의 겉면적의 합은 몇㎡입니까?(그림 20)

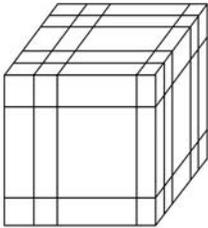



그림 20

〔풀이〕 한번 자를 때마다 두개의 1㎡의 겉면적을 얻습니다.

$$즉\ 1\times2=2(㎡)$$

모두 $2+3+4=9$(번)잘랐으므로 $2\times9=$ $=18$(㎡)의 겉면적을 얻습니다.

그러므로 크고작은 60개의 직6면체의 겉면적의 합은

$$6+18=24(㎡)$$

답. 60개의 직6면체의 겉면적의 합은 24㎡입니다.

〔례7〕 한 변의 길이가 5㎝인 바른6면체모양의 나무토막이 있는데 그림 21의 (1)에서와 같이 매개 면에서 보면 완전히 뚫린 다 같은 구멍을 볼수 있습니다. 이 립체도형의 겉면적을 구하시오.

〔풀이〕 바른6면체 중심에 구멍을 뚫었으므로 겉면적을 계산하기 쉽지 않습니다.

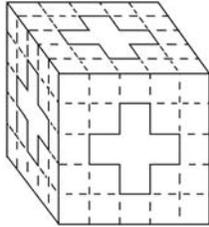
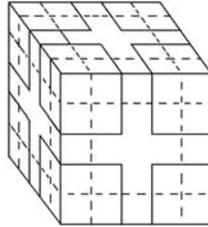



그림 21

따라서 이 립체도형을 한 변의 길이가 2㎝인 바른6면체 8개(바른6면체의 8개의 꼭두점이 있는 곳)와 변의 길이가 1㎝인 바른6면체 12개로 이루어진것으로 봅니다. (그림 21(2))

바른6면체 8개의 겉면적은 $2\times2\times6\times8=192$(㎠)이고 작은 바른6면체 12개의 겉면적은 $1\times1\times6\times12=72$(㎠)입니다.

그런데 매개의 작은 바른6면체에서 2개 면은 다 큰 바른6면체에 붙어있는데 1개 면이 붙을 때마다 겉면적은 $1\times1\times2=2$(㎠)씩 줄어들고 2개 면이 붙을 때마다 겉면적은 $2\times2=4$(㎠) 줄어듭니다.

12개의 작은 바른6면체가 다 이렇게 붙어있으므로 겉면적은

$$4\times12=48(㎠)$$

줄어듭니다.

따라서 전체 겉면적은

$$2^2\times6\times8+1^2\times6\times12-1^2\times2\times2\times12=$$
$$=192+72-48=$$
$$=216(㎠)$$

답: 이 립체도형의 겉면적은 216㎠입니다.

〔례8〕 한 변의 길이가 1㎝인 바른6면체 1993개를 쌓아서 하나의 큰 직6면체를 만들면 그 겉면적은 제일 적어서 얼마이겠습니까?

〔풀이〕 1993이 씨수이므로 바른6면체 1993개로는 길이 1993㎝,

너비 1㎝, 높이 1㎝인 직6면체만을 만들수 있습니다.

따라서 이 직6면체의 겉면적은

$$1993\times1\times4+1\times1\times2=7974(㎠)$$

답: 큰 바른6면체의 겉면적은 7974㎠입니다.

〔례9〕 체적이 1㎤인 작은 바른6면체 1000개로 한 변의 길이가 10㎝인 큰 바른6면체를 만들고 겉면에 색칠을 한 다음 다시 원래의 작은 바른6면체로 갈라놓았습니다. 이런 작은 바른6면체들가운데서 적어도 한개 면에 색칠을 한 바른6면체의 개수는 얼마입니까?

〔풀이〕 구하려는것은 한개 면, 두개 면, 세개 면에 색칠을 한 바른6면체의 총개수입니다. 그런데 색칠을 하지 않은 작은 바른6면체는 한 변의 길이가 10㎝인 큰 바른6면체안에 있습니다. 즉 큰 바른6면체의 겉의 한돌기를 없애고 남은것입니다.

따라서 그 개수는 $(10-2)\times(10-2)\times(10-2)=512$(개)입니다.

그러므로 적어도 한 면을 색칠한 바른6면체의 개수는

$1000-512=488$(개)입니다.

답: 작은 바른6면체들가운데서 적어도 1개 면을 색칠한 바른6면체의 개수는 488개입니다.

〔례10〕 길이가 17, 너비가 7, 높이가 3인 직6면체 6개를 하나의 큰 직6면체모양의 물건으로 포장하려고 합니다.

(1) 모두 몇가지 서로 다른 포장방법이 있습니까? (겉면적이 같으면 한가지 포장방법으로 봅니다.)

(2) 어느 포장방법에서 직6면체의 겉면적이 제일 작습니까? 그림을 그리시오.

〔풀이〕 같은 직6면체 6개를 한줄로 포장하는 방법에는 다음의 두가지가 있습니다.

① 길이가 17, 너비가 7인 면을 한데 붙이고 길이 3×6, 너비 17, 높이 7인 큰 직6면체를 만드는것인데 이때 그 겉면적은

$[(3\times6)\times7+(3\times6)\times17+17\times7]\times2=551\times2=1102$입니다.

② 너비 7, 높이 3인 면을 한데 붙이고 길이 17×6, 너비 7, 높

이 3인 큰 직6면체를 만드는것인데 이때 그 겉면적은

$$[(17\times6)\times3+(17\times6)\times7+7\times3]\times2=1041\times2=2082$$입니다.

같은 직6면체 6개를 2개의 층으로 포장하는 방법에는 다음의 7가지가 있습니다.

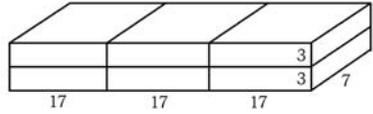



그림 22

① 그림 22와 같이 이때에는 길이 17×3, 너비 7, 높이 3×2이므로 그 겉면적은

$$[(17\times3)\times7+(17\times3)\times(3\times2)+7\times(3\times2)]\times2=$$
$$=705\times2=1410$$

② 그림 23과 같이 이때에는 길이 17×3, 너비 3, 높이 7×2이므로 그 겉면적은

$$[(17\times3)\times3+(17\times3)\times(7\times2)+(7\times2)\times3]\times2=$$
$$=909\times2=1818$$

③ 그림 24인 경우에는 길이 7×3, 너비 17, 높이 3×2이므로 그 겉면적은

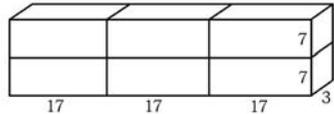



그림 23

$$[(7\times3)\times17+(7\times3)\times(3\times2)+$$
$$+17\times(3\times2)]\times2=585\times2=1170$$

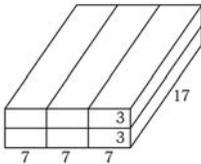



그림 24

④ 그림 25와 같은 경우에는 길이 7×3, 너비 3, 높이 17×2이므로 그 겉면적은

$$[(7\times3)\times3+(7\times3)\times(17\times2)+(17\times2)\times3]\times$$
$$\times2=879\times2=1758$$

⑤ 그림 26과 같은 경우에는 길이 3×3, 너비 7, 높이 17×2이므로 그 겉면적은

$$[(3\times3)\times7+(3\times3)\times(17\times2)+(17\times2)\times7]\times2=$$
$$=607\times2=1214$$

⑥ 그림 27과 같은 경우에는 길이 3×3, 너비 17, 높이 7×2이므로 그 겉면적은

$$[(3\times3)\times17+(3\times3)\times(7\times2)+(7\times2)\times17]\times2=$$
$$=517\times2=1034$$

답: 8가지의 서로 다른 포장방법에서 8번째(그림 27) 직6면체의 겉면적이 제일 작습니다.

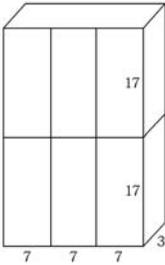



그림 25

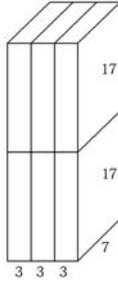



그림 26

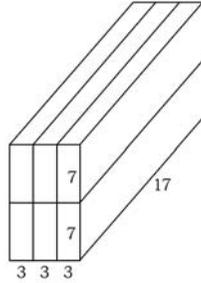



그림 27

련습 13－1

1. 그림 28에서와 같이 세개의 바른6면체모양의 나무토막으로 한 모형을 만들었는데 한 변의 길이는 각각 1m, 2m, 4m입니다.

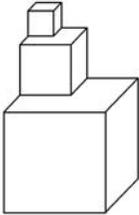
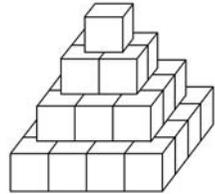



그림 28

이 모형의 큰 바른6면체의 밑면외의 나머지 면에 모두 색칠을 하였다면 색칠을 한 면적은 몇㎡이겠습니까?

2. 명식이는 한 변의 길이가 각각 1, 2, 3, 4, 5, 6(단위;dm)인 바른6면체 6개를 큰 것으로부터 쌓아올려 하나의 탑을 만들었습니다.

그리고 겹친 부분을 풀로 붙인 다음 겉에 드러난 부분에는 색칠을 하였습니다.

그러면 색칠을 한 부분의 면적은 몇㎠이겠습니까?

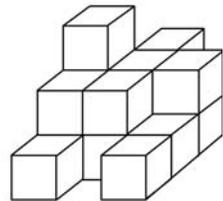



그림 29

3. 한 변의 길이가 1m인 바른6면체 30개를 그림 29에서와 같이 쌓았습니다. 이 립체도형의 겉면적은 몇㎡이겠습니까?

그림 30

4. 그림 30은 한 변의 길이가 2㎝인 바른6면체 16개를 쌓아올려 만든것입니다. 그 겉면적은 몇㎠이겠습니까?

5. 그림 31에서와 같이 한 변의 길이가 4㎝인 바른6면체의 앞, 뒤, 옆, 우, 아래 각 면의 중심에서 한 변의 길이가 1㎝인 바른6면체를 각각 파내고 한가지 놀이감을 만들었습니다.

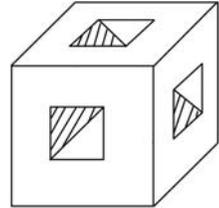



그림 31

이 놀이감의 겉면적을 구하시오.

6. 그림 32는 한개 겉면에만 붉은색칠을 한 한 변의 길이가 10㎝인 바른6면체모양의 나무토막입니다.

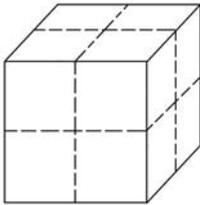



그림 32

이제 그것을 그림의 점선에 따라 8개의 바른6면체로 잘랐습니다. 이런 작은 바른6면체에서 색칠을 하지 않은 모든 겉면적의 합은 몇㎠입니까?

7. 한 변의 길이가 5㎝인 바른6면체모양의 나무토막이 있는데 매 면에서 보면 다 《＋자형》구멍이 뚫려 있습니다.(그림 33)

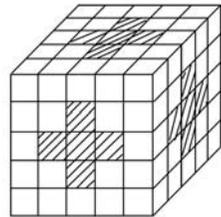



그림 33

이 나무토막을 노란색칠감속에 잠갔다 꺼내여 말리운 다음 그것을 한 변의 길이가 1㎝인 작은 바른6면체로 잘랐습니다.

이런 작은 바른6면체에서 노란색칠을 하지 않은 모든 면적의 합은 몇㎠입니까?

8. 길이가 25㎝, 너비가 10㎝, 높이가 4㎝인 직6면체모양의 나무토막을 베서 크기가 같은 바른6면체 몇개를 만들었습니다.

그다음 다시 붙여서 하나의 큰 바른6면체를 만들었습니다.

이 큰 바른6면체의 겉면적은 몇㎠입니까?

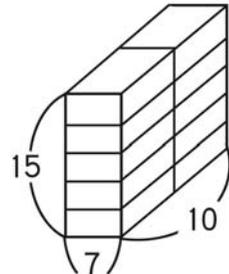



그림 34

9. 그림 34와 같이 길이가 7㎝, 너비가 5㎝,

높이가 3㎝인 직6면체나무토막 10개를 붙여서 하나의 직6면체를 만들었습니다.

이 직6면체의 걸면적은 제일 작아서 몇㎠입니까?

10. 세개의 바른6면체의 한 변의 길이는 각각 2㎝, 2㎝, 5㎝입니다.

이것들을 한데 붙여서 새로운 도형을 만들었습니다. 다음 물음에 대답하시오.

(1) 어떻게 붙여야 새로운 도형의 걸면적이 제일 작겠습니까? (그림으로 표시하시오.)

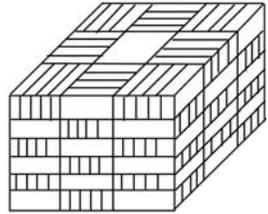
(2) 이 도형의 제일 작은 걸면적은 몇㎠입니까?

11. 벽돌 216장이 무져있습니다.(그림 35) 이 벽돌무지의 두 면이 벽에 붙었습니다.

그림 35

이 벽돌무지의 걸면에 회칠을 하였습니다.

걸면에 흰색이 묻은 벽돌이 모두 몇장이겠습니까?

12. 길이가 10㎝, 너비가 6㎝, 높이가 4㎝인 직6면체 세개를 붙여서 하나의 큰 직6면체를 만들었습니다.

이 큰 직6면체의 걸면적의 최대값과 최소값의 차는 얼마입니까?

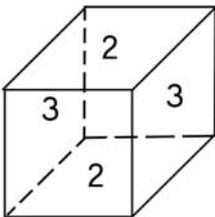



그림 36

13. 변의 길이가 1인 작은 바른6면체가 8개 있습니다.

매개 작은 바른6면체에는 마주한 면이 세개조가 있습니다.

1에 마주하고있는 면에는 수자 1을 써놓았고 2의 마주한 면에는 수자 2를, 3의 마주한 면에는 3을 써놓았습니다.

지금 이 8개의 작은 바른6면체를 붙여서 한 변의 길이가 2인 큰 바른6면체를 만들었습니다.

큰 바른6면체의 매개 면에 있는 4개 수자의 합이 련속된 6개의

자연수가 되게 붙이는 방법이 있겠습니까?(그림 36)

14. 크기가 같은 바른6면체가 n개 있습니다.

이 바른6면체를 쌓아서 하나의 직6면체를 만듭니다.

직6면체의 밑면은 원래의 바른6면체의 밑면이 됩니다.

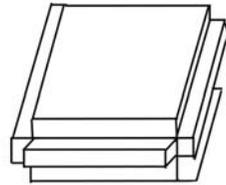
이 직6면체의 겉면적은 3096㎠입니다.

이 직6면체의 맨 우에서 한개의 바른6면체를 없앤 후에 얻어지는 새로운 직6면체의 겉면적은 원래 직6면체의 겉면적보다 144㎠ 작습니다.

그러면 n은 얼마입니까?

그림 37

15. 한 변의 길이가 1인 작은 바른6면체 455개를 붙여서 하나의 큰 직6면체를 만들었습니다.

변을 따라 작은 바른6면체를 없애면 작은 바른6면체가 371개 남습니다.

붙여서 만든 큰 직6면체의 변의 길이는 각각 얼마입니까? 변을 따라 작은 바른6면체를 없앤 후 얻어지는 다면체의 겉면적은 얼마입니까?(그림 37)

제2절 체적계산

우리는 다음과 같은것을 알고있습니다.

직6면체의 체적＝길이×너비×높이

바른6면체의 체적＝한 변의 길이×한 변의 길이×한 변의 길이

직6면체 또는 바른6면체의 체적＝밑면적×높이(또는 가로자른 자름면의 면적×높이)

이러한 지식에 의하여 이 절에서는 몇개의 직6면체 또는 바른6면체로 이루어진 복잡한 립체도형의 체적계산을 하게 됩니다.

중점

1. 직6면체, 바른6면체의 체적계산공식을 능숙히 리용할줄 알아야 합니다.

2. 체적(속이 찬것, 속이 빈것), 용적(겉부분 제외)을 구하는것인가 아니면 용량을 구하는것인가를 정확히 갈라볼줄 알아야 합니다.

3. 세세히 관찰하고 계산하는 습성을 키우며 도형을 보는 능력과 공간상상력을 키워야 합니다.

〔례1〕 한 변의 길이가 8㎝인 바른6면체모양의 강괴의 아래우밑면의 중심에 구멍을 뚫어 기계부속품을 만들려고 합니다.

구멍의 밑면이 변의 길이가 2㎝인 바른4각형일 때 이 부속품의 체적과 겉면적을 구하시오.

〔풀이〕 겉면적: $8\times8\times6+2\times8\times4-2\times2\times2=440$(㎠)

체적: $8\times8\times8-2\times2\times8=480$(㎤)

답: 이 부속품의 체적은 480㎤이고 겉면적은 440㎠입니다.

〔례2〕 그림 38(1)에서와 같이 바른6면체의 6개 면에 각각 1, 2, 3, 4, 5, 6이라는 수자가 씌여있는데 서로 마주하고있는 두 면의 두 수의 합은 7입니다.

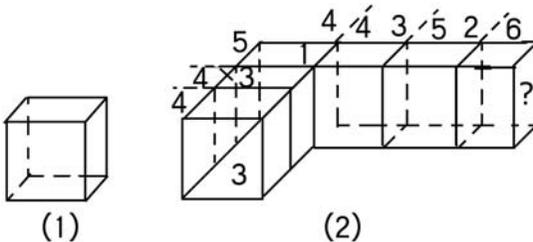



그림 38

이제 이 6개의 바른6면체를 그림 38의 (2)의 모양대로 배렬하였는데 왼쪽의 맨 뒤의 바른6면체의 웃면의 수자는 1이고 왼쪽앞의 바른6면체의 앞면의 수자는 3이며 서로 붙어있는 두 면의 수자의 합은 다 8입니다.

그러면 제일 마지막 바른6면체의 면우에 《?》로 표시한 수자는 얼마이겠습니까?

〔**풀이**〕 바른6면체의 서로 마주하고있는 두 면의 두 수의 합이 7이라는데로부터 왼쪽 앞의 첫번째 바른6면체의 맞은 면의 수는 4이고 서로 붙어있는 두 면의 두 수의 합은 8이라는데 의하여 왼쪽 두번째 바른6면체의 앞면의 수는 4입니다.

그러면 마찬가지방법으로 왼쪽 두번째의 뒤의 수는 3이고 왼쪽 마지막의 앞면의 수는 5입니다. 또 뒤의 왼쪽 바른6면체의 웃면의 수자가 1이므로 아래의 수는 6이고 앞의 수가 5이므로 뒤의 수는 2입니다.

이제 왼쪽 뒤의 바른6면체의 왼쪽의 수를 4라고 하면 오른쪽 수는 5이고 뒤의 왼쪽으로부터 두번째의 바른6면체의 왼쪽의 수가 5이면 오른쪽 수는 2이고 세번째의 바른6면체의 왼쪽의 수가 6이면 오른쪽 수는 1이고 네번째 왼쪽의 수는 7입니다.

이것은 조건에 맞지 않습니다.

그러므로 뒤의 왼쪽 바른6면체의 왼쪽의 수는 반드시 3이고 오른쪽은 4이며 두번째 바른6면체의 왼쪽이 4이면 오른쪽은 3이며 세번째 바른6면체의 왼쪽이 5이면 오른쪽은 2이며 네번째 바른6면체의 왼쪽이 6이면 오른쪽은 1입니다.

답: 제일 오른쪽 바른6면체의 오른쪽 면의 《?》가 표시하는 수자는 1입니다.

〔**례3**〕 한 변의 길이가 1m인 바른6면체 2100개로 속이 비지 않은 직6면체를 만드는데 그 높이는 10m이고 길이와 너비는 다 높이보다 큽니다.

그 길이와 너비는 각각 몇m입니까?

〔**풀이**〕 작은 바른6면체를 쌓아 큰 직6면체를 만드는데 큰 직

6면체의 체적은 2100㎤이고 높이는 10m입니다. 즉 길이와 너비의 적은 정해진 값입니다. 여기서 길이×너비＝2100÷10＝210(㎡)

210을 씨인수분해하면 210＝3×2×5×7

그러면 조건에 의하여 길이와 너비는 3×5와 2×7로밖에 될수 없습니다.

즉 길이＝3×5＝15(m)

너비＝2×7＝14(m)

답: 길이와 너비는 각각 15m와 14m입니다.

〔례4〕 크고작은 세개의 직6면체모양의 저수지가 있는데 그 웃면은 다 바른4각형이고 변의 길이는 각각 5m, 3m, 2m입니다.

두 무지의 자갈을 각각 중간저수지와 작은 저수지에 넣었더니 두 저수지의 물면은 각각 8㎝, 6㎝ 높아졌습니다.

만일 이 두 무지의 자갈을 모두 큰 저수지에 넣으면 물면이 몇㎝ 높아지겠습니까?

〔풀이〕 저수지의 물면이 높아지면서 불어난 물의 체적은 물속에 넣은 자갈의 체적과 같습니다.

그런데 중간저수지의 웃면이 변의 길이가 3m인 바른4각형이고 물면의 높아진 높이가 8㎝이므로 중간저수지에 들어간 자갈의 체적은 3×3×0.08＝0.72(㎥)입니다.

작은 저수지의 웃면이 변의 길이가 2m인 바른4각형이고 자갈을 넣은 후 물면의 높이가 6㎝ 불어났으므로 작은 저수지에 들어간 자갈의 체적은 2×2×0.06＝0.24(㎥)입니다.

따라서 자갈의 총체적은 0.24＋0.72＝0.96(㎥)입니다.

이제 모든 자갈을 큰 저수지에 넣는다고 하면 큰 저수지의 물면이 높아진것으로 하여 불어난 물의 체적은 0.96㎥입니다.

그런데 큰 저수지의 밑면의 면적이 5×5＝25(㎡)이므로 큰 저수지의 물면의 높이는

0.96÷(5×5)＝0.96÷25＝0.0384(m)＝3.84(㎝)

높아졌습니다.

답: 큰 저수지의 물면은 3.84㎝ 높아졌습니다.

〔례5〕 직6면체모양의 물통이 있는데 안으로 재면 길이 6㎗, 너비 5㎗입니다. 이 물통에 먼저 82ℓ의 물을 넣고 다음에 변의 길이가 2㎗인 바른6면체모양의 쇠덩이를 넣었더니 물면이 1㎗ 채 차지 못했습니다. 이 물통의 용적은 얼마입니까?

〔풀이〕 물속에 넣은 바른6면체모양의 쇠덩이의 체적은

$$2\times2\times2=8(\text{dm}^3)$$

물면우의 빈 공간의 용적은 $5\times6\times1=30(\text{dm}^3)$

물통의 용적 $82+8+30=120(\text{dm}^3)=120(\ell)$

답: 직6면체모양의 물통의 용적은 120ℓ입니다.

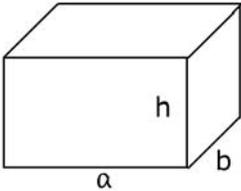
〔례6〕 직6면체가 있는데 그것을 두개의 직6면체로 자르려고 합니다. 만일 자름면이 앞뒤면에 평행되면 두개의 직6면체로 자른 후에 겉면적이 174㎠ 늘어나고 자름면이 옆면에 평행이면 겉면적은 138㎠ 늘어나며 자름면이 아래우면에 평행되면 겉면적은 1334㎠ 늘어납니다.

그러면 이 직6면체의 체적은 몇㎤입니까? (그림 39)

그림 39

〔풀이〕 조건에 의하여 매번 자른 후에는 다 앞면, 뒤면, 옆면, 웃면, 아래면에 평행이므로 여전히 직6면체이고 한번 자를 때마다 겉면적은 늘어난다는것을 알수 있습니다.

원래의 직6면체의 길이, 너비, 높이를 각각 a, b, h라고 하면

$$a\times h=174\div2=87=3\times29$$

$$b\times h=138\div2=69=3\times23$$

$$a\times b=1334\div2=667=29\times23$$

$$(a\times b\times h)^2=(a\times h)\times(b\times h)\times(a\times b)=$$

$$=(3\times29)\times(3\times23)\times(29\times23)=(29\times23\times3)^2$$

$$a\times b\times h=29\times23\times3=2001(\text{cm}^3)$$

답: 이 직6면체의 체적은 2001㎤입니다.

〔례7〕 길이가 24㎗, 너비 9㎗, 높이 8㎗인 물통에 5㎗의 깊이

로 물을 넣은 다음 변의 길이가 6㎝인 바른6면체모양의 쇠덩이를 넣었습니다. 물높이는 몇㎝ 높아졌습니까?

〔풀이〕 이 문제에서는 먼저 높아진 물높이가 쇠덩이를 완전히 물에 잠그게 하는가 하는것을 판단해야 합니다.

만일 높아진 물면이 쇠덩이를 물속에 잠그게 한다면 높아진 물의 체적이 바로 쇠덩이의 체적 $6\times6\times6=216$(㎥)이고 또 물통에서의 높이를 $216\div(24\times9)=1$(㎝) 늘어나게 합니다.

즉 물깊이가 원래 4㎝이던것이 지금은 5㎝로 되였습니다. 이것은 6㎝높이의 쇠덩이를 물에 완전히 잠그게 한다는것에 모순됩니다. 그러므로 불어난 물높이는 옹근 쇠덩이를 물에 완전히 잠그지 못합니다.

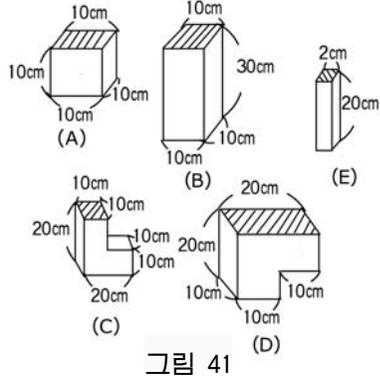
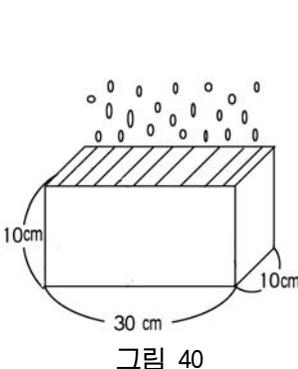
불어난 물높이가 쇠덩이를 물속에 잠그지 못하므로 물높이가 x㎝ 높아졌다고 하면

$$24\times9\times x=6\times6\times(x+4)$$
$$x=0.8$$

답: 물높이는 0.8㎝ 높아졌습니다.

〔례8〕 하늘에서 비가 계속 내리는데 그림 40에서와 같이 비오는 곳에 놓아둔 직6면체모양의 그릇에 비물이 차는데는 1시간이 걸립니다.

다음과 같은 A—E의 서로 다른 그릇(그림 41)에 비물이 차는데는 각각 몇시간이 걸리겠습니까?(웃면은 열린 부분입니다.)

그림 40　　그림 41

〔**풀이**〕문제에서 비가 계속 내린다는 조건은 비가 고르롭게 내린다는것으로 볼수 있습니다.

비물은 열려진 웃면으로 수직으로 떨어집니다.

그런데 그림40에서 웃면과 밑면은 크기는 같고 그릇에 비물이 차는데는 1시간이 걸립니다. 즉 한시간후에는 그릇에 비물이 차는데 그 높이는 10㎝입니다. 만일 그릇의 높이가 10㎝가 아니라 무한하다면 두시간후 그릇에서 비물의 높이는 20㎝로 될것이며 이후부터 1시간씩 지날 때마다 비물은 10㎝씩 늘어날것입니다. 이제 직6면체의 그릇에 얇은 철판(그 두께는 계산하지 않습니다.) 1개를 수직으로 넣어 큰 그릇을 두개의 작은 그릇으로 만들었다면 작은 그릇의 웃면은 비록 작아졌지만 매개 작은 그릇의 웃면의 합과 밑면의 크기는 여전히 같으므로 한시간후 매개 작은 그릇의 비물의 높이는 여전히 10㎝입니다. 우의 분석을 통하여 다음과 같은 결론을 얻을수 있습니다. 그릇의 웃면과 밑면의 크기가 같으면 1시간후 그릇의 비물의 높이는 10㎝입니다. 따라서 그림 41의 그릇들을 보면 A, B, E 세가지 그릇의 웃면은 밑면의 크기와 같습니다.

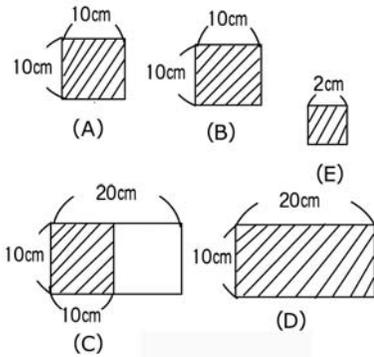
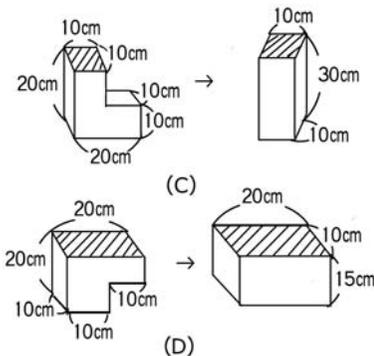



그림 41을 우에서 아래로 보면 다음과 같습니다.(그림 42)

A그릇의 높이가 10㎝이므로 비물이 A그릇에 차는데는 1시간이 걸립니다.

B그릇의 높이가 30㎝이므로 비물이 B그릇에 차는데는 3시간이 걸립니다.

그림 42

그림 43

E그릇의 높이가 20㎝이므로 비물이 E그릇에 차는데는 2시간이 걸립니다.

나머지 C, D 두가지 그릇은 웃면과 밑면의 크기가 같은 그릇으로 바꾸어야 합니다. (그림 43에서와 같이)

이때 C그릇의 높이는 30㎝로 되므로 비물이 차는데는 3시간이 걸리고 D그릇의 높이는 15㎝로 되므로 비물이 차는데는 1.5시간이 걸립니다.

련습 13-2

1. 바른6면체모양의 세 어항이 있는데 매개 어항에서 한 변의 길이는 다 4dm이고 다른 한 변의 길이는 다 5dm이며 또 한변의 길이는 다 6dm입니다. 지금 세 어항에 깊이가 2dm되게 다 물을 넣었는데 매 어항에서의 물의 체적은 서로 다릅니다. 만일 세 어항중에 한 어항안의 물을 다른 한 어항에 넣는다면 물의 높이는 최고 몇dm로 될수 있습니까? 이때 어항안의 물의 체적은 몇ℓ이겠습니까?

2. 직6면체모양의 물통이 있는데 통안에서 재니 길이는 3dm이고 너비는 2dm였습니다. 이 물통에 쇠덩이를 넣었더니 물면이 1㎝ 높아졌습니다. 이 쇠덩이의 체적은 몇㎤입니까? 매㎤당 철의 질량이 7.8g이라고 하면 이 쇠덩이의 질량은 몇㎏이겠습니까?

3. 한 직6면체를 길이 방향으로 한 토막이 6㎝ 되게 네토막으로 똑같이 잘랐습니다. 그랬더니 겉면적이 24㎠ 늘어났습니다. 원래 직6면체의 체적은 몇㎤이겠습니까?

4. 직6면체의 밑면은 바른 4각형입니다. 이 직6면체에서 밑면이 바른4각형이고 높이가 2dm인 직6면체를 잘라내였더니 남은 바른6면체의 겉면적은 원래의 직6면체의 겉면적보다 8㎠ 줄어들었습니다. 잘라버린 직6면체의 체적은 몇㎥입니까?

5. 길이가 13㎝이고 너비가 9㎝인 직4각형모양의 판자에서 변의 길이가 2㎝인 바른4각형을 네귀에서 베냈습니다. 그다음 점선을 따라 접어서 직6면체모양의 그릇을 만들었습니다. 이 그릇의 체적은

몇㎤입니까?(그림 44)

6. 투명한 작은 바른6면체모양의 유리그릇과 붉은색 바른6면체모양의 유리그릇을 붙여서 하나의 큰 바른6면체 $ABCDA_1B_1C_1D_1$를 만들었습니다. 큰 바른6면체안의 대각선 AC_1, BD_1, CA_1, DB_1가 지나간 작은 바른6면체는 모두 붉은색 유리의 바른6면체이고 다른 부분은 모두 투명한 유리의 바른6면체입니다. 작은 붉은색 유리 바른6면체를 401개 썼다면 투명한 작은 바른6면체는 몇개 썼습니까?(그림 45)

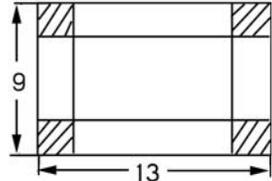



그림 44

7. 한 변의 길이가 3㎝인 바른6면체로 작은 바른6면체 몇개를 만들었습니다. 작은 바른6면체의 길이는 반드시 옹근수여야 합니다. 이런 작은 바른6면체의 체적은 다 같지 않아도 됩니다. 그러면 최소한 몇개의 작은 바른6면체를 만들수 있습니까?

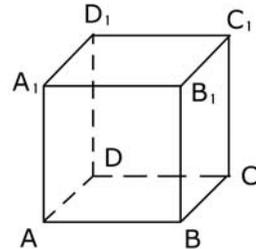



그림 45

8. 길이가 10㎝, 너비가 20㎝인 직4각형모양의 양철판이 있습니다. 이 판대기로 길이가 5㎝인 덮개가 없는 직6면체양철통을 한개 만듭니다.(용접한 곳과 양철판의 두께를 계산하지 않으며 그릇의 크기는 클수록 좋습니다.) 양철통의 체적은 얼마입니까?

9. 한 변의 길이가 20인 큰 바른6면체의 매 모서리에서 작은 바른6면체를 하나씩 떼내여 8개의 작은 바른6면체를 얻었습니다. 이런 작은 바른6면체가운데서 웃면의 네개는 변의 길이가 12이고 아래면의 네개는 변의 길이가 13입니다. 이 8개의 작은 바른6면체의 공통부분의 체적은 얼마입니까?

10. 직6면체모양의 물통의 길이는 25㎝이고 너비는 20㎝이며 높이는 30㎝입니다. 한 변의 길이가 10㎝인 바른6면체모양의 쇠덩이를 물통안에 넣었습니다.

(1) 만일 쇠덩이가 전부 물통에 잠겼다면 물면은 높아지지만 물이 넘쳐나지 않습니다. 물면이 몇㎝ 높아졌습니까?

(2) 물통안의 원래의 물높이가 8㎝라면 이 쇠덩이를 넣은 후 물면높이는 몇㎝이겠습니까?

(3) 물통안의 원래의 물높이가 5㎝라면 이 쇠덩이를 넣은 후 물면높이는 몇㎝이겠습니까?

11. 다음 그림 46은 바른6면체종이함을 뜯어서 평면우에 펼쳐놓은 모양입니다.

(1) 만일 이 평면도를 원래의 바른6면체로 만든다면 그림중의 점 F와 점 G는 각각 어느 점과 일치되겠습니까?

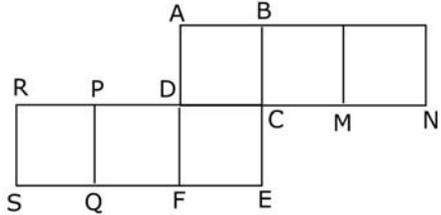



그림 46

(2) 원래의 바른6면체를 그림의 두 변 AB와 BC중간점의 련결선을 따라 절반으로 잘라내고 그 절단면이 바른6각형이라면 이 바른6각형의 6개 변은 각각 바른6면체의 6개 면우에 있게 됩니다. 이 바른6각형의 6개 변을 그리시오.

12. 길이가 12m인 직6면체나무를 그의 길이방향에 따라 6토막으로 잘랐습니다. 겉면적이 원래보다 120㎠ 늘어났다면 이 나무의 원래 체적은 얼마이겠습니까?

13. 한 물통의 안의 길이는 5㎗, 너비는 3㎗, 높이는 4㎗입니다. 물통에는 물이 차지 않았습니다. 길이가 4㎗, 너비가 4㎗, 높이가 2㎗인 직6면체쇠덩이를 물통안에 수직으로 넣었습니다. 이때 물통안의 물이 원래보다 $\frac{1}{3}$이 넘쳐났습니다. 물통안에 원래 있은 물의 체적과 물통그릇의 체적의 비는 얼마입니까?

제14장 분수의 간단한 계산

제1절 넊셈계산법칙과 성질의 리용

중 점

1. 넊셈계산법칙과 성질에 기초하여 계산을 간단하게 할줄 알아야 합니다.

2. 분석, 추리, 종합, 개괄 등 계산능력을 한계단 더 높여야 합니다.

〔례1〕 $55\times\frac{55}{56}$를 계산하시오.

〔**풀이**〕 계산식을 보면 $\frac{55}{56}$는 1에 가깝고 $\frac{55}{56}$를 $1-\frac{1}{56}$로 볼수 있다는것을 알수 있습니다. 그러면 곱하기분배법칙을 리용하여 간단하게 계산할수 있습니다.

$$55\times\frac{55}{56}=$$

$$=55\times(1-\frac{1}{56})=$$

$$=55\times1-55\times\frac{1}{56}=$$

$$=55-\frac{55}{56}=$$

$=54\frac{1}{56}$

〔례2〕 $\frac{1}{4}\times(4.85\div\frac{5}{18}-3.6+6.15\times3\frac{3}{5})$을 계산하시오.

〔풀이〕 주어진 식$=\frac{1}{4}\times(4.85\times\frac{18}{5}-3.6+6.15\times3\frac{3}{5})=$

$=\frac{1}{4}\times(4.85\times3\frac{3}{5}-3.6+6.15\times3\frac{3}{5})=$

$=\frac{1}{4}\times(4.85\times3\frac{3}{5}-3\frac{3}{5}+6.15\times3\frac{3}{5})=$

$=\frac{1}{4}\times[(4.85-1+6.15)\times3\frac{3}{5}]=$

$=\frac{1}{4}\times36=$

$=9$

〔례3〕 $12.5\times(36-7\frac{1}{5})\div3.6$을 계산하시오.

〔풀이〕 $12.5\times(36-7\frac{1}{5})\div3.6=$

$=12.5\times(36\div3.6-7.2\div3.6)=$

$=12.5\times8=$

$=100$

〔례4〕 $(1+0.23+0.34)\times(0.23+0.34+0.65)-(1+0.23+$
$+0.34+0.65)\times(0.23+0.34)$를 계산하시오.

〔풀이〕 $A=0.23+0.34$, $B=0.23+0.34+0.65$라고 하면

주어진 식$=(1+A)\times B-(1+B)\times A=$

$=B+A\times B-A-B\times A=$

$=B-A=$

$=0.23+0.34+0.65-(0.23+0.34)=$

$=0.65$

〔례5〕 $(49-\frac{1}{8})\times\frac{1}{8}+(46-\frac{1}{8})\times\frac{1}{8}+(43-\frac{1}{8})\times\frac{1}{8}+$ $+\cdots+(1-\frac{1}{8})\times\frac{1}{8}$을 계산하시오.

〔풀이〕 곱하기분배법칙을 리용하여 매 마디에 있는 두개 분수를 각각 $\frac{1}{8}$과 곱할수 있습니다. 그다음 다시 곱하기분배법칙을 리용하여 계산하면 됩니다. 49, 46, 43, …, 1은 하나의 같은차수렬로서 모두 $(49-1)\div3+1=17$(개)의 수가 있습니다.

$$\text{주어진 식}=49\times\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\times\frac{1}{8}+46\times\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\times\frac{1}{8}+43\times\frac{1}{8}-$$

$$-\frac{1}{8}\times\frac{1}{8}+\cdots+1\times\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\times\frac{1}{8}=$$

$$=(49+46+43+\cdots+1)\times\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\times\frac{1}{8}\times17=$$

$$=53\frac{1}{8}-\frac{17}{64}=$$

$$=52\frac{55}{64}$$

〔례6〕 $39\times\frac{148}{149}+148\times\frac{86}{149}+48\times\frac{74}{149}$를 계산하시오.

〔풀이〕 $148\times\frac{86}{149}$은 $148\times\frac{1}{149}\times86=86\times\frac{148}{149}$로 변화시킬수 있고 $48\times\frac{74}{149}$는 $24\times2\times\frac{74}{149}=24\times\frac{148}{149}$로 변화시킬수 있습니다.

$$\text{주어진 식}=39\times\frac{148}{149}+148\times\frac{1}{149}\times86+24\times2\times\frac{74}{149}=$$

$$=(39+86+24)+\frac{148}{149}=$$

$$=149\times\frac{148}{149}=$$

$$=148$$

〔례7〕 $29\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+39\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}+49\frac{1}{4}\times\frac{4}{5}+59\frac{1}{5}\times\frac{5}{6}$를 계산하시오.

〔풀이〕 주어진 식$=(30-\frac{1}{2})\times\frac{2}{3}+(40-\frac{2}{3})\times\frac{3}{4}+(50-$

$$-\frac{3}{4})\times\frac{4}{5}+(60-\frac{4}{5})\times\frac{5}{6}=$$

$$=30\times\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+40\times\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}+$$

$$+50\times\frac{4}{5}-\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}+60\times\frac{5}{6}-\frac{4}{5}\times\frac{5}{6}=$$

$$=20+30+40+50-(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{3}{5}+\frac{2}{3})=$$

$$=140-2\frac{1}{10}=$$

$$=137\frac{9}{10}$$

〔례8〕 $(\frac{1}{11}+\frac{1}{21}+\frac{1}{31}+\frac{1}{41})\times(\frac{1}{21}+\frac{1}{31}+\frac{1}{41}+\frac{1}{51})-$ $-(\frac{1}{11}+\frac{1}{21}+\frac{1}{31}+\frac{1}{41}+\frac{1}{51})\times(\frac{1}{21}+\frac{1}{31}+\frac{1}{41})$을 계산하시오.

〔풀이〕 $\frac{1}{11}+\frac{1}{21}+\frac{1}{31}+\frac{1}{41}=\mathrm{A}$, $\frac{1}{21}+\frac{1}{31}+\frac{1}{41}=\mathrm{B}$ 라고 하고 곱하기분배법칙을 리용하여 간단하게 계산합니다.

주어진 식$=\mathrm{A}\times(\mathrm{B}+\frac{1}{51})-(\mathrm{A}+\frac{1}{51})\times\mathrm{B}=$

$$=AB-\frac{1}{51}A-AB+\frac{1}{51}B=$$

$$=\frac{1}{51}\times(A-B)=$$

$$=\frac{1}{51}\times\left[\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{21}+\frac{1}{31}+\frac{1}{41}\right)-\left(\frac{1}{21}+\frac{1}{31}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{41}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{51}\times\frac{1}{11}=$$

$$=\frac{1}{561}$$

련습 14-1

1. $3.51\times49+35.1\times5.1+49\times51$을 계산하시오.
2. $1.1+1.91+1.991+\cdots+1.\underbrace{99\cdots99}_{100개}1$을 계산하시오.
3. $99\times43+98\times42+97\times41$은 얼마입니까?
4. $0.7\times1\frac{4}{9}+2\frac{3}{4}\times15+0.7\times\frac{5}{9}+\frac{1}{4}\times15$를 계산하시오.
5. $\frac{17}{77}\times10+\frac{17}{77}\times9+\frac{17}{77}\times8+\cdots+\frac{17}{77}\times2+\frac{17}{77}$은 얼마입니까?
6. 다음의것을 계산하시오.

1) $1.1+3.3+5.5+7.7+9.9+11.11+13.13+15.15+$
$+17.17+19.19$

2) $\left(2\frac{1}{2003}\times9\frac{5}{8}+7\frac{2002}{2003}\times9.625\right)\div96\frac{1}{4}$

3) $85.42\times7903.29-286.5\times790.329+79032.9\times4.323$

7. 다음 문제를 계산하시오.

1) $(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{4})\times(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5})-(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5})\times$
$\times(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})$

2) $76\times(\frac{1}{23}-\frac{1}{53})+23\times(\frac{1}{53}+\frac{1}{76})-53\times(\frac{1}{23}-\frac{1}{76})$

3) $4\times(\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9})+(\frac{1}{19}-\frac{1}{17})\times(\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9})-$
$-4\times(\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9})+(\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9})\times(\frac{1}{17}-\frac{1}{19})$

8. 다음 문제를 계산하시오.

1) $1\frac{1}{8}-1\div 8\div\frac{1}{7}+0.125\times 11-13\times 12.5\%$

2) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{31}+\frac{1}{62}+\frac{1}{124}+\frac{1}{248}+\frac{1}{496}$

3) $51\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}+71\frac{3}{4}\times\frac{4}{7}+91\frac{4}{5}\times\frac{5}{9}$

4) $1\frac{4}{17}\times(2\frac{2}{3}-\frac{3}{4})-(6\frac{6}{7}-3\frac{9}{13})\div(3\frac{3}{7}-2\frac{2}{11})\times\frac{13}{33}+$
$+17\frac{11}{12}\div\frac{17}{21}$

9. $200\frac{1}{2}\times 20\frac{1}{20}\times 2005-3\times 20\frac{1}{20}\times 2005\times\frac{1}{2}+3\times 200\frac{1}{2}\times$
$\times 5\times\frac{1}{20}-\frac{1}{2}\times 50\times\frac{1}{200}$을 계산하시오.

10. $2005\times\frac{3}{8}-0.375\times 1949+3.75\times 2.4$를 계산하시오.

11. $84\frac{4}{19}\times 1.375+105\frac{5}{19}\times 0.9$를 계산하시오.

12. 다음 문제를 계산하시오.

1) $(1-\frac{1}{2})\times(1-\frac{1}{3})\times(1-\frac{1}{4})\times\cdots\times(1-\frac{1}{2005})$

2) $1+\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{3}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{100}+$

$+\frac{2}{100}+\cdots+\frac{1}{100}$

3) $76\times(\frac{1}{23}-\frac{1}{53})+23\times(\frac{1}{53}-\frac{1}{76})-53\times(\frac{1}{23}-\frac{1}{76})$

4) $59\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+79\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}+99\frac{1}{4}\times\frac{4}{5}+119\frac{1}{5}\times\frac{5}{6}$

5) $\frac{1}{11}+\frac{14}{15}+\frac{17}{21}+\frac{34}{35}+\frac{37}{56}+\frac{87}{88}$

6) $\frac{2^3-1}{2^3+1}\times\frac{3^3-1}{3^3+1}\times\frac{4^3-1}{4^3+1}\times\cdots\times\frac{100^3-1}{100^3+1}$

7) $(1-\frac{1}{2})\times(2-\frac{2}{3})\times(3-\frac{3}{4})\times(4-\frac{4}{5})\times(5-\frac{5}{6})\times(6-$

$-\frac{6}{7})\times(7-\frac{7}{8})\times(8-\frac{8}{9})\times(9-\frac{9}{10})$

제2절 약분

중 점

1. 약분하는 방법을 잘 알고 분자, 분모중의 공통수를 없애여 간단하게 계산할줄 알아야 합니다.

2. 넉셈계산의 성질에 기초하여 분자, 분모를 다른 수들로 전환시키고 고쳐 쓰며 변형하는 방법으로 간단하게 계산해야 합니다.

〔례1〕 $\dfrac{1.2+2.3+3.4+4.5+5.6+6.7}{12+23+34+45+56+67}$을 계산하시오.

〔풀이〕 주어진 식$=\dfrac{1.2+2.3+3.4+4.5+5.6+6.7}{(1.2+2.3+3.4+4.5+5.6+6.7)\times 10}=$

$$=\frac{1}{10}$$

〔례2〕 $(9\dfrac{2}{7}+7\dfrac{2}{9})\div(\dfrac{5}{7}+\dfrac{5}{9})$를 계산하시오.

〔풀이〕 $9\dfrac{2}{7}+7\dfrac{2}{9}=\dfrac{65}{7}+\dfrac{65}{9}=65\times(\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{9})$

$\dfrac{5}{7}+\dfrac{5}{9}=5\times(\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{9})$을 리용합니다.

그러면 분자와 분모중에 같은 수 $(\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{9})$이 있습니다.

$$(9\frac{2}{7}+7\frac{2}{9})\div(\frac{5}{7}+\frac{5}{9})=$$

$$=(\frac{65}{7}+\frac{65}{9})\div(\frac{5}{7}+\frac{5}{9})=$$

$$=\frac{65\times(\frac{1}{7}+\frac{1}{9})}{5\times(\frac{1}{7}+\frac{1}{9})}=\frac{65}{5}=13$$

〔례3〕 $\dfrac{1+2+3+4+5+6+7+8+7+6+5+4+3+2+1}{888888\times 888888}$을 계산하시오.

$1+2+3+4+5+6+7+8+7+6+5+4+3+2+1=8\times 8$

그러면 분모가 888888×888888과 약분될수 있습니다.

주어진 식$=\dfrac{8\times 8}{888888\times 888888}=\dfrac{1\times 1}{111111\times 111111}=$

$$=\frac{1}{12345654321}$$

〔례4〕 $\frac{1993+1992\times1994}{1993\times1994-1}$를 계산하시오.

〔풀이〕 분자와 분모에는 공통인 수가 없으므로 직접 약분할수 없습니다. 그러나 분자와 분모의 수를 다음과 같이 변화시킬수 있습니다.

$1993+1992\times1994=1994-1+1992\times1994=1994\times1993-1$

$1993\times1994-1=(1992+1)\times1994-1=1992\times1994+1993$

주어진 식$=\frac{1994-1+1992\times1994}{1993\times1994-1}=$

$$=\frac{1993\times1994-1}{1993\times1994-1}=1$$

〔례5〕 $\frac{1+3+\cdots+199}{2+4+6+\cdots+200}$를 계산하시오.

〔풀이〕 $1+3+5+\cdots+199=(1+199)\times100\div2$

$2+4+6+\cdots+200=(2+200)\times100\div2$

그러면 분자와 분모에 $100\div2$가 있으므로 약분하여 간단하게 계산할수 있습니다.

$$\frac{1+3+5+\cdots+199}{2+4+6+\cdots+200}=\frac{(1+199)\times100\div2}{(2+200)\times100\div2}=\frac{100}{101}$$

〔례6〕 $\frac{5\times6\times7\times8\times9-1\times2\times3\times4\times5}{5\times6\times7\times8\times9}$를 계산하시오.

〔풀이〕 $A=5\times6\times7\times8\times9$, $B=1\times2\times3\times4\times5$로 합시다.

그러면 주어진 식$=\frac{A-B}{A}$로 됩니다.

즉 $\frac{A-B}{A}=\frac{A}{A}-\frac{B}{A}=1-\frac{B}{A}$

따라서 주어진 식$=\dfrac{5\times6\times7\times8\times9-1\times2\times3\times4\times5}{5\times6\times7\times8\times9}=$

$$=1-\frac{1}{126}=\frac{125}{126}$$

〔례7〕 $\dfrac{123456789}{1234567891^2-1234567890\times1234567892}$를 계산하시오.

〔풀이〕 $1234567891^2=1234567891\times1234567891=$

$=1234567891\times(1234567890+1)=$

$=1234567891\times1234567890+1234567891$

$1234567890\times1234567892=1234567890\times(1234567891+1)=$

$=1234567890\times1234567891+1234567890$

그러면 분모의 차는 1입니다.

주어진 식=

$$=\frac{123456789}{1234567891\times(1234567890+1)-1234567890\times(1234567891+1)}=$$

$$=\frac{123456789}{1234567891-1234567890}=\frac{123456789}{1}=$$

$=123456789$

〔례8〕 $\dfrac{1\times2+2\times4+3\times6+4\times8}{2\times3+4\times6+6\times9+8\times12}$을 계산하시오.

〔풀이〕 $1\times2=1\times1\times(1\times2)$, $3\times6=3\times3\times(1\times2)$

$2\times4=2\times2\times(1\times2)$, $4\times8=4\times4\times(1\times2)$

즉 $1\times2+2\times4+3\times6+4\times8=$

$=(1\times2)\times(1\times1+2\times2+3\times3+4\times4)$

$2\times3=1\times1\times(2\times3)$, $6\times9=3\times3\times(2\times3)$

$4\times6=2\times2\times(2\times3)$, $8\times12=4\times4\times(2\times3)$

즉 $2\times3+4\times6+6\times9+8\times12=2\times3\times(1\times1+2\times2+3\times3+4\times4)$

주어진 식$=\dfrac{1\times2\times(1\times1+2\times2+3\times3+4\times4)}{2\times3\times(1\times1+2\times2+3\times3+4\times4)}=\dfrac{1}{3}$

련습 14－2

1. 다음 문제를 계산하시오.

1) $$\frac{2004^2+3\times2000+12}{2004^3-2004\times9}$$

2) $$\frac{\frac{2}{3}+(1\frac{2}{3}-\frac{7}{12})}{(0.25+\frac{2}{7})\times16}$$

3) $$\frac{2004+2003\times2005}{2004\times2005-1}$$

4) $$\frac{2004+20042004+200420042004+2004200420042004}{2005+20052005+200520052005+2005200520052005}$$

2. 다음 문제를 계산하시오.

1) $$\frac{\frac{1234567891}{1234567890}-\frac{1234567890}{1234567891}}{\frac{1}{1234567890}+\frac{1}{1234567891}}$$

2) $$\frac{2005+794\times2003}{2004\times794-589}-\frac{5}{17}$$

3) $$\frac{1\frac{2}{3}+2\frac{3}{4}+\cdots+2000\frac{2001}{2002}+2001\frac{2002}{2003}}{3\frac{1}{3}+5\frac{2}{4}+\cdots+4001\frac{2001}{2002}+4003\frac{2002}{2003}}$$

4) $$\frac{1\times2\times3+2\times4\times6+\cdots+100\times200\times300}{2\times3\times4+4\times6\times8+\cdots+200\times300\times400}$$

3. 다음 문제를 계산하시오.

1) $\dfrac{1994+1993\times 1995}{1994\times 1995-1}+\dfrac{1995+1994\times 1996}{1995\times 1996-1}+$

$+\dfrac{1996+1995\times 1997}{1996\times 1997-1}$

2) $\dfrac{1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6+6\times 7\times 8\times 9\times 10\times 11}{1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6}$

3) $\dfrac{3\frac{3}{4}\div\frac{5}{16}-11\frac{1}{3}}{\frac{7}{18}+4\frac{1}{2}+\frac{5}{6}\div 1\frac{1}{4}}\times 3\frac{5}{8}$

4) $\dfrac{2\frac{2}{3}\times(1\frac{7}{8}-\frac{5}{6})}{3\frac{1}{4}\div(\frac{7}{8}+1\frac{5}{6})}$

5) $\dfrac{2005+2004\times 2006}{2005\times 2005+2006\times 2006-3}$

6) $\dfrac{10000\times 10002+10001\times 9999+20022002}{10001^2-10000^2}$

7) $\dfrac{1985+1987+1989+\cdots+1999}{1986+1988+1990+\cdots+2000}$

8) $\dfrac{\frac{360}{31}\div\frac{374}{161}\div\frac{598}{297}}{42\div(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5})}$

9) $\dfrac{1.2\times 2.4\times 4.8+2\times 4\times 8+\frac{1}{13}\times\frac{2}{13}\times\frac{4}{13}}{1.2\times 3.6\times 10.8+2\times 6\times 8+\frac{1}{13}\times\frac{3}{13}\times\frac{9}{13}}$

제3절 마디가르기

중 점

분수를 분해하는 방법을 잘 응용하여 복잡한 분수들의 합을 구하는 계산을 간단하게 할줄 알아야 합니다.

〔례1〕 $\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\cdots+\frac{1}{1+2+\cdots+99}$ 을 계산하시오.

〔풀이〕 매 분수의 분모가 모두 몇개의 련속된 자연수의 합이면 분모를 같은차수렬의 합을 구하는 형식으로 표시할수 있습니다.

$$\text{주어진 식}=\frac{1}{(1+2)\times2\div2}+\frac{1}{(1+3)\times3\div2}+\cdots+$$

$$+\frac{1}{(1+99)+99\div2}=$$

$$=\frac{2}{(1+2)\times2}+\frac{2}{(1+3)\times3}+\cdots+\frac{2}{(1+99)\times99}=$$

$$=2\times(\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{99\times100})=$$

$$=2\times(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{99}-\frac{1}{100})=$$

$$=2\times(\frac{1}{2}-\frac{1}{100})=\frac{49}{50}$$

〔례2〕 $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{49\times50}$을 계산하시오.

〔풀이〕 $\frac{1}{1\times 2}=1-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2\times 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3\times 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$,

…, $\frac{1}{49\times 50}=\frac{1}{49}-\frac{1}{50}$

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{49\times 50}=$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{49}-\frac{1}{50}=$$

$$=1-\frac{1}{50}=\frac{49}{50}$$

〔례3〕 $\frac{1}{5\times 8}+\frac{1}{8\times 11}+\cdots+\frac{1}{98\times 101}$을 계산하시오.

〔풀이〕 $\frac{1}{5\times 8}=\frac{1}{3}(\frac{1}{5}-\frac{1}{8})$, $\frac{1}{8\times 11}=\frac{1}{3}(\frac{1}{8}-\frac{1}{11})$, …,

$\frac{1}{98\times 101}=\frac{1}{3}(\frac{1}{98}-\frac{1}{101})$

$\frac{1}{5\times 8}+\frac{1}{8\times 11}+\cdots+\frac{1}{98\times 101}=(\frac{1}{5}-\frac{1}{8})\times\frac{1}{3}+$

$+(\frac{1}{8}-\frac{1}{11})\times\frac{1}{3}+\cdots+(\frac{1}{98}-\frac{1}{101})\times\frac{1}{3}=$

$=\frac{1}{3}\times(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{11}+\frac{1}{11}-\frac{1}{14}+\cdots+\frac{1}{98}-\frac{1}{101})=$

$=\frac{1}{3}\times(\frac{1}{5}-\frac{1}{101})=$

$=\frac{32}{505}$

〔례4〕 $\frac{1}{1\times 2\times 3}+\frac{1}{2\times 3\times 4}+\cdots+\frac{1}{9\times 10\times 11}$을 계산하시오.

〔풀이〕 $\frac{1}{1\times 2\times 3}=(\frac{1}{1\times 2}-\frac{1}{2\times 3})\times\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2\times 3\times 4}=$

$$=\left(\frac{1}{2\times3}-\frac{1}{3\times4}\right)\times\frac{1}{2},\quad \cdots,\quad \frac{1}{9\times10\times11}=\left(\frac{1}{9\times10}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{10\times11}\right)\times\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\cdots+\frac{1}{9\times10\times11}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times3}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\times3}-\frac{1}{3\times4}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{9\times10}-\frac{1}{10\times11}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{2\times3}-\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{9\times10}\right.-$$

$$\left.-\frac{1}{10\times11}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{110}\right)=$$

$$=\frac{27}{110}$$

〔**례5**〕 $1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+100}$ 을 계산하시오.

〔**풀이**〕 이 문제에서 분자는 모두 1이고 분모는 차례로 같은차수렬입니다. 이것을 변형시키면

$$\frac{1}{1+2}=\frac{1}{\frac{(1+2)\times2}{2}}=\frac{2}{2\times(1+2)}=2\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$$

$$\frac{1}{1+2+3}=\frac{1}{\frac{(1+3)\times3}{2}}=\frac{2}{3\times(1+3)}=2\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$$

…

$$\frac{1}{1+2+3+\cdots+100}=2\times\left(\frac{1}{100}-\frac{1}{101}\right)$$

$$1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+100}=$$

$$=1+2\times(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+2\times(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+2\times(\frac{1}{100}-\frac{1}{101})=$$

$$=2\times\frac{1}{2}+2\times(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+2\times(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+2\times$$

$$\times(\frac{1}{100}-\frac{1}{101})=$$

$$=2\times(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{100}-\frac{1}{101})=$$

$$=2\times(1-\frac{1}{101})=1\frac{99}{101}$$

〔례6〕 $1-\frac{5}{6}+\frac{7}{12}-\frac{9}{20}+\frac{11}{30}-\frac{13}{42}+\frac{15}{56}-\frac{17}{72}+\frac{19}{90}$를 계산하시오.

〔풀이〕 매개 분수의 분모를 보면 모두 련이은 두 자연수의 적이라는것을 알수 있습니다.

그러므로 분수의 마디를 가르는 방법으로 계산할수 있습니다.

$$주어진\ 식=1-(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})-(\frac{1}{4}+\frac{1}{5})+(\frac{1}{5}+$$

$$+\frac{1}{6})-(\frac{1}{6}+\frac{1}{7})+(\frac{1}{7}+\frac{1}{8})-(\frac{1}{8}+\frac{1}{9})+(\frac{1}{9}+\frac{1}{10})=$$

$$=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+$$

$$+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}=$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{10}=\frac{3}{5}$$

〔례7〕 $\frac{1}{7}+\frac{3}{8}+\frac{7}{36}+\frac{29}{56}+\frac{37}{63}+\frac{41}{72}+\frac{53}{77}+\frac{29}{84}+\frac{3}{88}$을 계산하시오.

〔풀이〕 주어진 식$=\frac{1}{7}+\frac{3}{8}+(\frac{4}{9}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{7}+\frac{3}{8})+(\frac{1}{7}+$
$+\frac{4}{9})+(\frac{1}{8}+\frac{4}{9})+(\frac{1}{7}+\frac{6}{11})+(\frac{3}{7}-\frac{1}{12})+(\frac{1}{8}-\frac{1}{11})=$
$=(\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{3}{7})+(\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8})+(\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+$
$+\frac{4}{9})+(\frac{6}{11}-\frac{1}{11})-(\frac{1}{12}+\frac{1}{4})=$
$=1+1+\frac{4}{3}+\frac{5}{11}-\frac{1}{3}=\frac{38}{11}$

〔례8〕 $(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{60})+(\frac{2}{3}+\frac{2}{4}+\cdots+\frac{2}{60})+(\frac{3}{4}+$
$+\frac{3}{5}+\cdots+\frac{3}{60})+\cdots+(\frac{58}{59}+\frac{58}{60})+\frac{59}{60}$를 계산하시오.

〔풀이〕 먼저 문제에서 같은 분수를 모아서 더한 다음 다시 곱하기의 분배법칙을 리용하여 계산을 간단하게 합니다.

주어진 식$=1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{2}{3})+(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4})+(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+$
$+\frac{3}{5}+\frac{4}{5})+(\frac{1}{6}+\frac{2}{6}+\cdots+\frac{5}{6})+\cdots+(\frac{1}{60}+$
$+\frac{2}{60}+\cdots+\frac{58}{60}+\frac{59}{60})=$
$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{3(3-1)}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{4(4-1)}{2}+\frac{1}{5}\times$
$\times\frac{5(5-1)}{2}+\cdots+\frac{1}{60}\times\frac{60(60-1)}{2}=$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{3}{2}+\frac{4}{2}+\cdots+\frac{59}{2}=$$

$$=1+\frac{1}{2}\times(1+2+3+4+\cdots+59)=$$

$$=886$$

련습 14－3

1. 다음 문제를 계산하시오.

1) $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{7}$

2) $\frac{29}{42}+\frac{37}{56}+\frac{41}{72}+\frac{85}{99}+\frac{107}{143}+\frac{177}{182}$

3) $1\frac{1}{3}-\frac{7}{12}+\frac{9}{20}-\frac{11}{30}+\frac{13}{42}-\frac{15}{56}+\frac{17}{72}$

4) $\frac{1}{3}+\frac{3}{4}+\frac{2}{5}+\frac{5}{7}+\frac{7}{8}+\frac{9}{20}+\frac{10}{21}+\frac{11}{24}+\frac{19}{35}$

2. 다음의 문제를 계산하시오.

1) $\frac{4}{1\times6}+\frac{4}{6\times11}+\frac{4}{11\times16}+\cdots+\frac{4}{76\times81}$

2) $\frac{1}{1\times5}+\frac{1}{5\times9}+\frac{1}{9\times13}+\frac{1}{13\times17}+\frac{1}{17\times21}$

3) $42\times(\frac{1}{8}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}+\frac{1}{80}+\frac{1}{120}+\frac{1}{168})$

4) $1+3\frac{1}{6}+5\frac{1}{12}+7\frac{1}{20}+9\frac{1}{30}+11\frac{1}{42}+13\frac{1}{56}+$

$+15\frac{1}{72}+17\frac{1}{90}$

3. 다음 문제를 계산하시오.

1) $\frac{1}{1\times4}+\frac{1}{2\times5}+\frac{1}{3\times6}+\cdots+\frac{1}{9\times12}$

2) $\frac{1}{1\times2\times3\times4}+\frac{1}{2\times3\times4\times5}+\cdots+\frac{1}{11\times12\times13\times14}$

3) $\frac{3}{1\times2\times3\times4\times5\times6}+\frac{3}{2\times3\times4\times5\times6\times7}+\cdots+\frac{3}{11\times12\times13\times14\times15\times16}$

4) $\frac{455}{9\times11\times13}+\frac{1326}{11\times13\times17}+\frac{2223}{13\times17\times19}+\frac{3311}{17\times19\times23}$

5) $\frac{10}{1\times2}+\frac{20}{1\times2\times3}+\frac{30}{1\times2\times3\times4}+\cdots+\frac{90}{1\times2\times\cdots\times10}$

제15장 분수에 관한 응용문제

제1절 응용문제의 기본류형

중 점

1. 응용문제를 푸는 과정을 잘 알고 단위 1과 구체적인 수량, 분배률의 대응관계를 잘 설정해야 합니다.
2. 응용문제를 능숙하게 풀줄 알아야 합니다.

〔례1〕 어떤 공장에서 부속품 얼마를 생산할 계획입니다. 첫번에 계획의 $\frac{1}{2}$을 수행하고 두번째에는 계획의 $\frac{3}{7}$을 수행하고 세번째에는 450개를 수행한 결과 계획의 $\frac{1}{4}$을 넘쳐 수행했습니다. 부속품을 몇개 생산할 계획이였겠습니까?

〔**풀이**〕 생산하기로 계획한 부속품개수를 1로 합니다.

그러면 문제의 조건에 의하여 생산하려고 계획한 부속품의 개수는 다음과 같이 구할수 있습니다.

$$450\div\left(1-\frac{1}{2}-\frac{3}{7}+\frac{1}{4}\right)=$$

$$=450\div\frac{9}{28}=$$

$$=1400(\text{개})$$

답: 부속품을 1400개 생산하려고 계획하였습니다.

〔례2〕 리아저씨는 4일간에 부속품을 몇개 만들었습니다. 첫날과 두번째 날에 모두 54개 만들고 두번째, 세번째, 네번째 날에 모두 90개 만들었습니다. 두번째 날에 만든 개수는 만든 부속품의 $\frac{1}{5}$을 차지합니다. 만든 부속품은 모두 몇개입니까?

〔풀이〕 부속품의 총개수를 단위 1로 하면 54＋90＝114개에 대응하는 몫은 그 부속품의 총개수 단위 1과 두번째 날에 만든 $\frac{1}{5}$에 해당한 량입니다.

$$(54+90)\div(1+\frac{1}{5})=144\div1\frac{1}{5}=120(\text{개})$$

답: 부속품은 모두 120개입니다.

〔례3〕 중학교 2학년 1반의 남학생의 절반과 녀학생의 $\frac{1}{4}$은 모두 16명이고 녀학생의 절반과 남학생의 $\frac{1}{4}$은 모두 14명입니다. 2학년 1반에 학생이 모두 몇명 있습니까?

〔풀이〕 문제의 조건에 의하여

$$\text{남학생의 }\frac{1}{2}+\text{녀학생의 }\frac{1}{4}=16(\text{명})$$

$$\text{남학생의 }\frac{1}{4}+\text{녀학생의 }\frac{1}{2}=14(\text{명})$$

$$\text{남학생의 }\frac{3}{4}+\text{녀학생의 }\frac{3}{4}=30(\text{명})$$

$$(16+14)\div(\frac{1}{2}+\frac{1}{4})=30\div\frac{3}{4}=40(\text{명})$$

답: 학생이 모두 40명 있습니다.

련습 15－1

1. 영희는 책을 읽습니다. 첫날에 그 책의 $\frac{2}{3}$를 읽고 두번째

날에 나머지의 $\frac{1}{4}$을 읽었습니다. 2일동안에 책을 모두 30페지 읽었습니다. 이 책은 몇페지짜리입니까?

2. 직장에 로동자가 52명 있습니다. 후에 녀성로동자 4명이 들어왔습니다. 이때 녀성로동자수는 남성로동자수의 $\frac{3}{4}$이였습니다. 이 직장에 원래 있은 녀성로동자수는 몇명입니까?

3. 1반학생의 $\frac{1}{5}$을 2반에 보낸 후 두 반의 학생수는 같게 되였습니다. 원래 2반의 학생수는 1반학생수의 몇배나 됩니까?

4. 자동차가 A곳으로부터 B곳으로 갑니다. 전체 거리의 $\frac{8}{15}$을 가니 중간점을 $1\frac{1}{5}$㎞ 초과하였습니다. AB사이의 거리는 몇㎞입니까?

5. 석탄이 두무지가 있습니다. A무지에서 $\frac{1}{4}$을 실어가고 B무지에서 일부를 실어간 후 $\frac{3}{5}$이 남았습니다. 이때 A무지의 질량은 B무지의 질량의 $\frac{3}{5}$이였습니다. A무지에 원래 석탄이 120t 있었다면 B무지에는 몇t 있었겠습니까?

6. ㄱ, ㄴ 두 량식창고가 있습니다. 원래 ㄱ창고에 있은 쌀은 ㄴ창고의 $\frac{5}{7}$였습니다. 만일 ㄴ창고의 쌀 6t을 ㄱ창고로 가져간다면 ㄱ창고의 쌀은 ㄴ창고의 $\frac{4}{5}$로 됩니다. 원래 ㄱ, ㄴ 두 창고에 쌀이 각각 몇t 있었겠습니까?

7. 금을 물속에 넣고 뜨면 질량이 $\frac{1}{19}$이 줄어들고 은을 물속

에 넣고 뜨면 질량이 $\frac{1}{10}$이 줄어듭니다. 질량이 770g인 금과 은의 합금을 물속에 넣고 뜨면 질량이 모두 50g 줄어듭니다. 이 합금에 금과 은이 각각 몇g 들어있습니까?

8. 명식이와 철수에게 통이 하나씩 있는데 안에는 바둑알이 담겨있습니다. 두통에 있는 바둑알은 모두 360알입니다. 명식이는 자기 통의 바둑알의 $\frac{1}{5}$을 꺼내 철수의 통에 넣었습니다. 이때 철수의 통에 있는 바둑알은 원래보다 $\frac{1}{7}$ 불어났습니다. 원래 명식에게 바둑알이 몇개 있었습니까? 철수에게는 몇개 있었습니까?

9. 어느 한 체육경기에 선수 60명이 참가하였습니다. 그중에서 녀자선수는 $\frac{1}{4}$을 차지합니다. 그런데 어느날 녀자선수 몇명이 일이 있어 경기에 참가하지 못했습니다. 그리하여 이날 녀자선수는 경기에 참가한 인원의 $\frac{2}{11}$로 되였습니다. 이날 경기에 참가한 녀자선수는 몇명입니까?

10. ㄱ, ㄴ, ㄷ 세사람이 공원에 놀러 갑니다. ㄱ는 입장권을 사고 ㄴ는 식료품을 샀으며 ㄷ는 단물을 샀습니다. 결과 ㄴ가 쓴 돈은 ㄱ의 $\frac{9}{10}$이고 ㄷ가 쓴 돈은 ㄴ의 $\frac{2}{3}$였습니다. 꼭같이 돈을 쓰게 하면 ㄷ가 ㄱ와 ㄴ에게 35원을 주어야 합니다. ㄱ와 ㄴ는 각각 몇원을 가져야 하겠습니까?

11. 어느 한 공장에서 부속품을 생산합니다. 첫날에 일부분을 생산한 후 생산한 개수와 생산하지 못한 개수의 비가 3:4로 되였습니다. 두번째 날에 또 52개를 생산한 후 생산한 개수는 생산하지 못한 개수의 4배였습니다. 첫날에 몇개 생산하였습니까?

제2절 단위 1의 전환

중 점

1. 문제의 조건에 의하여 단위 1인 량을 전환시키고 통일시킬줄 알아야 합니다.

2. 문제에서 변하지 않는 량을 틀어쥐고 분석하여야 합니다. 변하지 않는 량을 단위 1로 하고 문제를 풀수도 있습니다.

〔례1〕 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ 네사람이 나무를 모두 60그루 심었습니다. ㄱ가 심은 나무는 나머지 세사람이 심은 나무의 $\frac{1}{2}$이고 ㄴ가 심은 나무는 나머지 세사람이 심은 나무의 $\frac{1}{3}$이고 ㄷ가 심은 나무는 나머지 세사람이 심은 나무의 $\frac{1}{4}$입니다. ㄹ는 나무를 몇그루 심었겠습니까?

〔**풀이**〕 문제에서 나머지 세사람이 3번 나타났습니다. 그러나 나머지 세사람이 포함된 대상은 다릅니다. 그러므로 세개의 단위 1은 다릅니다. 즉 단위 1이 통일되지 않은것입니다. 때문에 네사람이 심은 총나무수를 단위 1로 할수 있습니다.

《ㄱ가 심은 나무는 나머지 세사람이 심은 나무의 $\frac{1}{2}$입니다.》를 ㄱ가 심은 나무가 1몫 차지하고 나머지 세사람이 심은 나무가 2몫 차지한다고 생각할수 있습니다. 그러면 ㄱ가 심은

나무는 총나무수의 $\frac{1}{1+2}=\frac{1}{3}$을 차지합니다. 마찬가지로 ㄴ가 심은 나무수는 총나무수의 $\frac{1}{1+3}=\frac{1}{4}$을 차지하고 ㄷ가 심은 나무는 총나무수의 $\frac{1}{1+4}=\frac{1}{5}$을 차지합니다. 이런 과정이 바로 단위 1을 전환시켜 단위 1을 총나무수에 통일시킨다는것입니다.

그러면 ㄹ가 나무를 몇그루 심었는가를 구하는것은 60그루의 $(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5})$이 얼마인가를 구하는것입니다.

$$60\times(1-\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+3}-\frac{1}{1+4})=$$

$$=60\times\frac{13}{60}=$$

$$=13(그루)$$

답: ㄹ는 나무를 13그루 심었습니다.

〔례2〕 중학교 5학년 1반에서 몇명을 뽑아 나무심기에 참가시키려고 합니다. 그런데 또 2명이 자각적으로 나무심기에 참가하여 실제로 나무심기에 참가한 학생은 나머지학생의 $\frac{1}{3}$로 되였습니다. 원래 몇명을 나무심기에 참가시키려 했습니까?

〔풀이〕 $2\div(\frac{1}{1+3}-\frac{1}{5})\times\frac{1}{5}=$

$$=2\div\frac{1}{20}\times\frac{1}{5}=$$

$$=40\times\frac{1}{5}=8(명)$$

답: 8명을 나무심기에 참가시키려 했습니다.

〔례3〕 놀이감공장의 세개 직장에서 함께 놀이감을 만듭니다. 1직장에서는 전체 량의 $\frac{2}{7}$를 만들었고 2직장에서는 1600개 만들었으며 3직장에서 만든 개수는 1직장과 2직장에서 만든 총개수의 절반입니다. 이 놀이감은 모두 몇개이겠습니까?

〔풀이〕 문제의 조건에 의하여 3직장에서 만든 개수는 세개 직장에서 만든 개수의 $\frac{1}{1+2}=\frac{1}{3}$입니다.

$$1600\div(1-\frac{2}{7}-\frac{1}{1+2})=$$

$$=1600\div\frac{8}{21}=$$

$$=4200(\text{개})$$

답: 놀이감은 모두 4200개입니다.

〔례4〕 련속된 5개의 짝수가 있습니다. 세번째 수는 첫번째 수와 다섯번째 수의 합의 $\frac{1}{4}$보다 18 더 큽니다. 이 5개 짝수의 합은 얼마입니까?

〔풀이〕 련속된 5개의 짝수 A, B, C, D, E의 중간수 C는 이 5개 수의 평균수입니다. 다시말하면 C는 5개 수의 합의 $\frac{1}{5}$입니다. 또한 C는 A와 E의 합의 $\frac{1}{2}$이라고도 말할수 있습니다. 그러면 《세번째 수는 첫번째 수와 다섯번째 수의 합의 $\frac{1}{4}$보다 18 더 큽니다.》를 《세번째 수는 세번째 수의 2배의 $\frac{1}{4}$보다 18이 더 큽니다.》로 전환시킬수 있습니다.

$$18\div(1-\frac{1}{4}\times2)\times5=$$

$$=18\div\frac{1}{2}\times5=$$
$$=36\times5=$$
$$=180$$

답: 련속된 5개의 짝수의 합은 180입니다.

〔례5〕 한 직4각형의 둘레의 길이는 130㎝입니다. 길이를 $\frac{2}{7}$ 늘이고 너비를 $\frac{1}{3}$ 줄이여도 얻는 새로운 직4각형의 둘레의 길이는 변하지 않습니다. 원래 직4각형의 길이와 너비는 각각 몇㎝입니까?

〔**풀이**〕 직4각형의 길이를 $\frac{2}{7}$ 늘구고 너비를 $\frac{1}{3}$ 줄이였을 때 둘레의 길이가 변하지 않는다는것은 길이의 $\frac{2}{7}$가 너비의 $\frac{1}{3}$과 같다는것을 말합니다.

그러면

$$\text{길이}:\text{너비}=\frac{1}{3}:\frac{2}{7}=\frac{1}{3}\times\frac{2}{7}=7:6$$

$$130\div2\times\frac{7}{6+7}=65\times\frac{7}{13}=35(\text{㎝})$$

$$130\div2\times\frac{6}{6+7}=65\times\frac{6}{13}=30(\text{㎝})$$

답: 길이는 35㎝이고 너비는 30㎝입니다.

〔례6〕 학교도서관에 문예도서와 과학기술도서가 모두 5400권 있었습니다. 그중에서 과학기술도서는 문예도서보다 $\frac{1}{5}$ 적습니다. 최근 과학기술도서를 또 들여왔습니다. 이때 과학기술도서와 문예도서의 비는 9:10입니다. 도서관에서는 과학기술도서를 몇권 사왔겠습니까?

〔**풀이**〕 조건에 의하여 문예도서권수는 변하지 않는 량입니다.

$$5400 \div (1-\frac{1}{5}+1)=$$

$$=5400 \div \frac{9}{5}=$$

$$=3000(\text{권})$$

이때 과학기술도서와 문예도서의 비는 9:10이므로 과학기술도서는

$$3000 \div 10 \times 9=2700(\text{권})$$

들여온 과학기술도서는

$$2700-3000 \times (1-\frac{1}{5})=300(\text{권})$$

답: 과학기술도서를 300권 들여왔습니다.

〔**례7**〕 ㄱ, ㄴ 두사람에게 원래 있었던 돈의 비률은 3:4였습니다. 후에 ㄱ가 ㄴ에게 50원을 주었을 때 ㄱ의 돈은 ㄴ의 $\frac{1}{2}$이였습니다. ㄱ, ㄴ 두사람에게 원래 돈이 각각 얼마 있었겠습니까?

〔**풀이**〕 문제의 조건에 의하면 ㄱ의 돈은 ㄴ의 $\frac{3}{4}$이고 ㄱ가 ㄴ에게 50원을 준 후 ㄱ의 돈은 ㄴ의 $\frac{1}{2}$입니다. 이것은 ㄱ, ㄴ 두사람의 돈액수가 모두 변하였다는것을 말합니다. 그러나 ㄱ, ㄴ 두사람의 돈의 총량은 변하지 않습니다. 그러므로 이 량을 단위 1로 하여 계산할수 있습니다.

$$50 \div (\frac{3}{3+4}-\frac{1}{1+2})=525(\text{원})$$

$$525 \times \frac{3}{3+4}=225(\text{원})$$

$$525 \times \frac{4}{3+4}=300(\text{원})$$

답: ㄱ에게 225원 있었고 ㄴ에게 300원 있었습니다.

〔례8〕 ㄱ, ㄴ 두가지 상품의 가격비는 7:3입니다. 이 두가지 상품의 가격을 모두 70원씩 올린다면 그것들의 가격비는 7:4로 됩니다. ㄱ상품의 원래의 가격은 얼마입니까?

〔풀이〕 두가지 상품의 가격을 모두 70원씩 올리면 그것들의 가격이 변화되며 또 그것들의 총가격도 변화됩니다. 그러나 두가지 상품의 올린 가격이 같기때문에 가격을 올린 후 두가지 상품의 가격차는 변하지 않습니다. 가격차라는 변하지 않는 량을 단위 1로 할수 있습니다.

그러면 《ㄱ, ㄴ 두가지 상품의 가격비는 7:3입니다.》가 《ㄱ의 가격은 가격차 $\frac{7}{7-3}$에 해당됩니다.》로 바꾸고 《그것들의 가격비는 7:4입니다.》를 《지금 ㄱ의 가격은 가격차의 $\frac{7}{7-4}$에 해당됩니다.》로 전환시킬수 있습니다.

$$70 \div (\frac{7}{3} - \frac{7}{4}) =$$

$$= 70 \div \frac{7}{12} = 120$$

$$120 \times \frac{7}{4} = 210(\text{원})$$

답: ㄱ상품의 본래가격은 210원입니다.

〔례9〕 참분수의 분자와 분모의 합은 49입니다. 분자에 4를 더하고 분모에서 4를 던 후 얻은 새로운 분수를 $\frac{3}{4}$으로 약분할수 있습니다. 본래의 분수를 구하시오.

〔풀이〕 문제의 조건에 의하여 분자와 분모의 합은 변하지 않으므로 새롭게 얻은 분수의 분자와 분모의 합도 49입니다. 또 새로운 분수를 $\frac{3}{4}$으로 약분할수 있다는데 의하여 새로운 분수의 분

자와 분모의 비가 3:4라는것을 알수 있습니다.

$$49\times\frac{3}{3+4}=21$$

$$49\times\frac{4}{3+4}=28$$

그러면 본래의 분자와 분모를 구할수 있습니다.

$$21-4=17$$

$$28+4=32$$

답: 본래의 분수는 $\frac{17}{32}$입니다.

(※ 여기서 분자와 분모의 합이 49라는것을 단위 1로 할수 있습니다.)

련습 15－2

1. 참분수의 분자와 분모의 합은 40입니다. 분자와 분모에서 모두 2를 덜어서 얻은 새로운 분수는 $\frac{5}{7}$입니다. 본래 분수는 얼마입니까?

2. 어느 한 학교에서 수학초빙강의를 하였습니다. 강의에 참가한 학생가운데 2명가운데는 6학년학생이 1명 있고 4명가운데는 5학년학생이 1명 있고 6명가운데는 4학년학생이 1명 있고 또 5명은 선생님입니다. 수학초빙강의를 들은 학생은 모두 몇명입니까?

3. 학교에 있는 그림책은 총도서의 $\frac{3}{5}$을 차지합니다. 그림책을 또 400권 사온 후 이때 그림책은 총도서의 $\frac{2}{3}$였습니다. 학교에 원래 있는 도서는 모두 몇권입니까?

4. 사탕이 있는데 우유사탕이 $\frac{9}{20}$를 차지합니다. 다시 과일사탕을 16알 넣은 후 우유사탕은 $\frac{1}{4}$이였습니다. 우유사탕은 몇알입니까?

5. 석탄 한무지가 있습니다. 이미 써버린 석탄과 아직 남아있는 석탄의 비는 1:5입니다. 다시 120t 쓴 후 이미 쓴 석탄은 쓰지 않은 석탄의 $\frac{3}{5}$이였습니다. 이 석탄무지에 있는 석탄은 몇t입니까?

6. ㄱ, ㄴ 두 책꽂이가 있습니다. ㄱ책꽂이에 있는 책의 $\frac{1}{4}$은 ㄴ책꽂이에 있는 책의 $\frac{2}{5}$입니다. ㄱ책꽂이에 있는 책은 ㄴ책꽂이에 있는 책보다 120권 더 많습니다. 두 책꽂이에 있는 책은 모두 몇권입니까?

7. 어떤 학교의 남학생수의 $\frac{1}{4}$은 녀학생수의 $\frac{1}{3}$보다 50명 많고 남학생수의 $\frac{3}{4}$은 녀학생수의 2배입니다. 이 학교의 남학생과 녀학생은 각각 몇명입니까?

8. 세 분수의 합은 $\frac{65}{99}$입니다. 첫째 수는 둘째 수의 $\frac{1}{3}$이고 둘째 수는 셋째 수의 $\frac{1}{3}$입니다. 세 분수는 각각 얼마입니까?

9. ㄱ, ㄴ 두 책꽂이에 책이 모두 102권 있습니다. ㄱ책꽂이에서 책을 24권 꺼내 ㄴ책꽂이에 넣었습니다. 그러니 ㄴ책꽂이에 있는 책의 $\frac{2}{3}$는 ㄱ책꽂이의 $\frac{3}{4}$과 같았습니다. ㄴ책꽂이에 책이 원래 몇권 있었겠습니까?

10. 어떤 공장의 남성로동자는 로동자전체의 $\frac{3}{5}$보다 60명 많고 녀성로동자는 남성로동자수의 $\frac{1}{3}$입니다. 이 공장에 있는 로동자는 모두 몇명입니까?

제3절 일에 관한 문제

일에 관한 문제는 분수에 관한 응용문제의 한가지 류형입니다. 여기서는 작업능률, 작업시간과 작업총량사이의 관계를 연구합니다. 여기서는 작업총량을 단위 1로 보고 작업능률을 계산합니다.

중 점

일에 관한 문제의 풀이방법을 잘 알고 기본수량관계식에 의거하여 정확히 문제를 풀어야 합니다.

〔례1〕 어떤 길을 ㄱ작업대가 혼자서 닦으면 24일간에 수행할수 있고 ㄴ작업대가 혼자서 닦으면 30일간에 수행할수 있습니다. ㄱ, ㄴ 두 작업대가 먼저 함께 며칠간 닦은 후 ㄴ작업대가 휴식하고 ㄱ대가 계속 닦아 6일간에 수행했습니다. ㄴ작업대가 며칠 닦았겠습니까?

〔풀이〕 작업총량을 1로 보면

ㄱ, ㄴ 두 작업대가 먼저 함께 닦은 며칠간의 작업량

$$1-\frac{1}{24}\times6=\frac{3}{4}$$

ㄴ작업대가 닦은 날일수

$$\frac{3}{4}\div(\frac{1}{24}+\frac{1}{30})=10(\text{일})$$

답: ㄴ작업대는 10일간 닦았습니다.

〔례2〕 어떤 길을 ㄱ작업대가 혼자서 닦으면 20일간에 수행할수 있고 ㄴ작업대가 혼자서 닦으면 30일간에 수행할수 있습니다. 지금 두 작업대가 함께 닦습니다. 도중에 ㄱ작업대가 2.5일 휴식하고 ㄴ작업대가 며칠 휴식하였습니다. 이렇게 하여 모두 14일간에 수행하였습니다. ㄴ작업대가 며칠 휴식하였겠습니까?

〔풀이〕 이 길을 단위 1로 보면 다음과 같은 두개 부분으로 볼수 있습니다. 한 부분은 ㄱ작업대가 닦은것이고 다른 한 부분은 ㄴ작업대가 닦은것입니다. 문제의 조건에 의하여 ㄱ작업대가 2.5일 휴식하였다는것은 ㄱ작업대가 14－2.5＝11.5(일) 닦았다는것을 말해줍니다. 먼저 ㄱ작업대가 11.5일간에 이 길을 얼마나 닦았는가를 구할수 있습니다.

$$\frac{1}{20}\times(14-2.5)=\frac{23}{40}$$

ㄴ작업대는 $1-\frac{23}{40}=\frac{17}{40}$만한것을 닦았습니다.

마지막에 《작업총량÷작업능률＝작업시간》에 근거하여 ㄴ작업대가 실지 닦은 날자를 구할수 있습니다. 다시말하면 ㄴ작업대가 휴식한 날자를 구할수 있습니다.

$$14-\frac{17}{40}\div\frac{1}{30}=$$

$$=14-12\frac{3}{4}=$$

$$=1\frac{1}{4}(\text{일})$$

답: ㄴ작업대는 $1\frac{1}{4}$일 휴식하였습니다.

〔례3〕 한 창고의 짐을 나르는데 ㄱ는 10시간 걸리고 ㄴ는 12시간 걸리며 ㄷ는 15시간 걸립니다. 같은 창고 A와 B가 있습니다. ㄱ는 A창고, ㄴ는 B창고에서 동시에 시작하여 짐을 나릅니다.

ㄷ는 처음에 ㄱ를 도와 짐을 나르고 도중에 또 ㄴ를 도와 짐을 날랐습니다. 마지막에 두 창고의 짐을 동시에 다 날랐습니다. ㄷ가 ㄱ를 도와 짐을 몇시간 날랐겠습니까?

〔풀이〕 한 창고의 량을 단위 1로 하고 ㄱ, ㄴ, ㄷ가 두 창고의 짐을 동시에 나르는데 시간이 모두 얼마 걸렸는가를 봅니다.

$$2\div(\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\frac{1}{15})=$$

$$=2\div\frac{1}{4}=$$

$$=8(\text{시간})$$

ㄱ, ㄴ, ㄷ는 모두 8시간 짐을 날랐습니다. 그러면 A창고의 짐 가운데서 일부분은 ㄱ가 8시간 나른 작업량이고 다른 일부분은 ㄷ가 ㄱ를 도와 나른 량입니다.

$$1-\frac{1}{10}\times8=\frac{1}{5}$$

마지막에 ㄷ가 A창고에서 $\frac{1}{5}$을 날랐다는데 의하여 ㄷ가 ㄱ를 도와 짐을 나른 시간을 구할수 있습니다.

$$\frac{1}{5}\div\frac{1}{15}=3(\text{시간})$$

답: ㄷ는 ㄱ를 도와 짐을 3시간 날랐습니다.

〔례4〕 어떤 일을 혼자서 하면 ㄱ는 10일간에 다할수 있고 ㄴ는 15일간에 다할수 있으며 ㄷ는 20일간에 다할수 있습니다. 지금 세사람이 함께 합니다. 도중에 ㄱ는 먼저 하루 휴식하고 ㄴ는 3일간 휴식하고 ㄷ는 일이 끝날 때까지 계속 일했습니다. 그러면 모두 며칠 걸리겠습니까?

〔풀이〕 ㄱ의 작업량＋ㄴ의 작업량＋ㄷ의 작업량＝1에 근거하여 방정식을 세우고 풀수 있습니다.

모두 x일 걸렸다면

$$\frac{1}{10}\times(x-1)+\frac{1}{15}\times(x-3)+\frac{1}{20}\times x=1$$

$$\frac{13}{60}x=1\frac{3}{10}$$

$$x=6$$

답: 모두 6일간 걸렸습니다.

〔례5〕 공원에 분수터를 새로 건설하였습니다. ㄱ수도관을 열면 1시간에 분수터에 물이 가득차고 ㄴ수도관을 열면 40분만에 물이 가득찹니다. 두 수도관을 동시에 $10\frac{2}{5}$분 여니 물이 $4\frac{1}{3}$t 들어왔습니다. 분수터에 물을 몇t 넣을수 있습니까?

〔**풀이**〕 물을 몇t 넣을수 있는가를 구하려면 먼저 $4\frac{1}{3}$t에 대응하는 몫이 분수터의 몇분의 몇인가를 구해야 합니다. 이것은 수도관을 동시에 $10\frac{2}{5}$분간 열 때 분수터에 물이 얼마나 차겠는가를 구하는것입니다.

$$(\frac{1}{60}+\frac{1}{40})\times10\frac{2}{5}=$$

$$=\frac{1}{24}\times\frac{52}{5}=$$

$$=\frac{13}{30}$$

분수터의 $\frac{13}{30}$은 $4\frac{1}{3}$t이므로 구하려는 량을 계산할수 있습니다.

$$4\frac{1}{3}\div\frac{13}{30}=10(t)$$

답: 물을 10t 넣을수 있습니다.

〔례6〕 부속품을 가공합니다. ㄱ가 혼자서 가공하면 3일간에 다

할수 있고 ㄴ가 혼자서 가공하면 4일간에 다할수 있습니다. 두 사람이 함께 가공하여 임무를 다할 때까지 ㄱ는 ㄴ보다 24개 더 가공하였습니다. 이 부속품은 모두 몇개입니까?

〔**풀이**〕 전체 량을 1로 보면

$$1 \div \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{12}{7}(\text{일})$$

$$\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\times\frac{12}{7}=$$

$$=\frac{1}{12}\times\frac{12}{7}=\frac{1}{7}$$

ㄱ는 ㄴ보다 이 부속품의 $\frac{1}{7}$을 더 가공하였다는데 의하여 부속품의 총개수를 구합니다.

$$24\div\frac{1}{7}=168(\text{개})$$

답: 총 168개입니다.

련습 15-3

1. 두 작업반이 물도랑을 팝니다. ㄱ작업반이 혼자서 파면 8일간 걸리고 ㄴ작업반이 혼자서 파면 12일간 걸립니다. 지금 두 작업반이 함께 며칠 판 후 ㄴ작업반이 가고 나머지를 ㄱ작업반이 3일간에 다 팠습니다. ㄴ작업반은 며칠 작업했습니까?

2. 어떤 일을 ㄱ, ㄴ가 함께 6일간 하여 그 일의 $\frac{5}{6}$를 하였습니다. ㄱ가 혼자서 그 일의 $\frac{1}{3}$을 하는것과 ㄴ가 혼자서 그 일의 $\frac{1}{2}$을 하는데 걸리는 시간은 같습니다. ㄴ의 작업능률은 얼마입니까?

3. 어떤 길을 ㄱ작업반이 혼자서 닦으면 40일간 걸리고 ㄴ작

업반이 혼자서 닦으면 24일간 걸립니다. 지금 두 작업반이 동시에 두끝에서 일을 시작한 결과 중간지점에서 750m 떨어진 곳에서 서로 만났습니다. 이 길의 총길이는 몇m입니까?

4. 배가 같은 속도로 항행하여 A도시로부터 B도시까지 가는데 3일간 걸리고 B도시로부터 A도시까지 오는데 4일간 걸립니다. 작은 나무떼목이 A도시로부터 B도시까지 떠내려가는데 며칠 걸리겠습니까?

5. 부속품을 ㄱ가 혼자서 가공하면 3일간 걸리고 ㄴ가 혼자서 가공하면 4일간 걸립니다.

두사람이 함께 가공하여 임무를 다할 때까지 ㄱ는 ㄴ보다 24개 더 가공하였습니다.

이 부속품의 개수는 모두 얼마입니까?

6. 부속품을 ㄱ, ㄴ 두사람이 함께 가공하면 24일간 걸립니다. ㄱ가 먼저 16일간 가공한 다음 ㄴ가 12일간 가공하니 아직 이 부속품의 $\frac{2}{5}$를 가공하지 못했습니다. ㄱ는 ㄴ보다 매일 부속품 3개를 더 가공합니다. 이 부속품은 모두 몇개입니까?

7. 두 차가 A, B 두곳에서 동시에 떠나 마주 달립니다. 4시간후 두 차는 서로 만났습니다. 그후 ㄱ차는 계속 달려 3시간만에 B곳에 도착하였습니다. ㄴ차는 매 시간에 24㎞씩 달립니다. A, B 두곳사이의 거리는 몇㎞입니까?

8. 짐 얼마를 ㄱ차가 나르면 24번에 다 나를수 있고 ㄴ차가 나르면 15번에 다 나를수 있습니다. ㄴ차는 ㄱ차보다 매번 3t을 더 나릅니다. 이 짐은 몇t이겠습니까?

9. 어떤 일을 ㄱ가 혼자서 하면 12시간 걸리고 ㄴ가 혼자서 하면 15시간 걸립니다. 지금 ㄱ, ㄴ가 함께 5시간 한 후 나머지를 ㄱ가 혼자서 다하였습니다. 이 일을 다할 때까지 ㄱ는 모두 몇시간 하였습니까?

10. 어떤 일을 ㄱ, ㄴ 두 작업반이 함께 하루 하면 이 일

의 $\frac{5}{24}$를 수행할수 있습니다. 만일 이 일을 ㄱ작업반이 2일간 하고 다시 ㄴ작업반이 3일간 한다면 전체 일의 $\frac{13}{24}$을 할수 있습니다. ㄱ, ㄴ 두 작업반이 단독으로 이 일을 한다면 각각 며칠 걸리겠습니까?

11. 한 원고를 ㄱ, ㄴ, ㄷ 세사람이 함께 타자한다면 6시간 걸리고 ㄴ, ㄷ, ㄹ 세사람이 함께 타자한다면 8시간 걸리고 ㄱ, ㄹ 두사람이 함께 타자한다면 12시간 걸립니다. 만일 ㄱ가 혼자서 타자한다면 몇시간 걸리겠습니까?

12. 부속품을 기능공이 혼자서 하면 12일간에 다 가공할수 있습니다. 견습공은 매일 기능공보다 6개 적게 만듭니다. 지금 기능공과 견습공이 함께 7일간에 다 만들었습니다. 그러면 부속품이 모두 몇개이겠습니까?

13. 어떤 일을 ㄱ가 혼자서 5일간 한 후 ㄴ가 혼자서 7일간 한다면 이 일의 $\frac{1}{5}$을 완수할수 있습니다. 만일 ㄱ가 혼자서 7일간 하고 ㄴ가 혼자서 5일간 한다면 이 일의 $\frac{1}{4}$을 다할수 있습니다. 만일 ㄱ가 혼자서 이 일을 하면 며칠 걸리겠습니까?

14. 어떤 일을 혼자서 하면 ㄱ는 9시간 걸리고 ㄴ는 12시간 걸립니다. 만일 이 일을 ㄱ, ㄴ, ㄱ, ㄴ, …의 순서로 돌아가면서 매번 1시간씩 한다면 이 일을 몇시간에 다할수 있겠습니까?

15. 어떤 일을 ㄱ, ㄴ 두 작업반이 함께 하면 $2\frac{2}{5}$일간 걸리고 돈이 2280원 들며 ㄴ, ㄷ 두 작업반이 함께 하면 $3\frac{3}{4}$일간 걸리고 돈은 2400원이 들며 ㄱ, ㄷ 두 작업반이 함께 하면 $2\frac{6}{7}$일간 걸리

고 돈은 2400원 듭니다. 총 돈을 되도록 적게 쓰려면 어느 작업반을 써야 하겠습니까?

제4절 일에 관한 문제의 전형적인 례

중 점

1. 일에 관한 응용문제의 풀이법칙을 잘 알아야 합니다.
2. 일에 관한 문제와 맞먹는 종합적인 문제를 탐구하고 그 풀이법칙을 민활하게 응용하는 능력을 키워야 합니다.

〔례1〕 ㄱ, ㄴ 두 작업반은 함께 어떤 일을 24일간에 완수했습니다. 만일 ㄱ작업반은 6일간 하고 ㄴ작업반이 4일간 한다면 일의 $\frac{1}{5}$만 다할수 있습니다. 두 작업반이 혼자서 이 일을 다하려면 각각 며칠 걸리겠습니까?

〔**풀이**〕 문제에서 ㄱ작업반은 혼자서 6일간 하고 ㄴ작업반이 4일간 하였다는것은 알지만 각자의 작업능률은 모르므로 풀수 없습니다. 우리는 두 작업반이 각각 혼자서 한것을 함께 한것으로 변화시킬수 있습니다.

ㄱ, ㄴ 두 작업반이 함께 4일간 하고 ㄱ작업반이 다시 2일간 하여 모두 $\frac{1}{5}$을 수행하였습니다. 능률의 합을 알고있으므로 먼저 함께 한 4일간의 작업량을 구할수 있습니다.

$$\frac{1}{24}\times4=\frac{1}{6}$$

그러면 ㄱ작업반이 2일간 한 작업량은

$$\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{1}{30}$$

ㄱ작업반의 능률은

$$\frac{1}{30}\div 2=\frac{1}{60}$$

ㄴ작업반의 작업능률은

$$\frac{1}{24}-\frac{1}{60}=\frac{1}{40}$$

답: ㄱ작업반이 혼자서 일을 수행하려면 60일간 걸리고 ㄴ작업반이 혼자서 일을 수행하려면 40일간 걸립니다.

〔**례2**〕 어떤 일을 ㄱ가 먼저 혼자 2일간 한 다음 ㄴ와 함께 7일간 하여 전체 일의 절반을 하였습니다. ㄱ, ㄴ의 작업능률의 비는 2:3입니다. 만일 ㄴ가 혼자서 한다면 며칠 걸려야 일을 다할수 있겠습니까?

〔**풀이**〕 문제의 조건에 의하여 ㄱ가 2+7=9일간 작업하고 ㄴ가 7일간 작업하여 일의 $\frac{1}{2}$을 다하였다는것을 알수 있습니다.

ㄱ, ㄴ의 작업능률의 비 2:3에 근거하여 같은 작업량을 하는데 걸리는 ㄱ, ㄴ의 시간비가 3:2라는것을 알수 있습니다. 또 같은 작업량을 하는데 ㄴ가 걸리는 시간은 ㄱ의 $\frac{2}{3}$라는것도 알수 있습니다. 그러면 문제에서 ㄱ가 9일간 한 작업량을 ㄴ가 한 날로 교체할수 있습니다.

$$9\times\frac{2}{3}=6(\text{일})$$

그러면 일의 절반을 다할 때를 ㄴ가 7+6=13(일)에 모두 한것으로 볼수 있습니다. 일의 절반을 다하는데 걸리는 날도 구할수 있습니다.

$$13\times 2=26(\text{일})$$

답: 26일 걸려야 다할수 있습니다.

〔례3〕 어떤 일을 ㄱ가 혼자서 하면 12시간 걸리고 ㄴ가 혼자서 하면 15시간 걸리며 ㄷ가 혼자서 하면 18시간 걸립니다. 먼저 ㄱ가 1시간 한 다음 ㄴ가 ㄱ를 교대하여 1시간 하고 다시 ㄷ가 ㄴ를 교대하여 1시간 하고 다시 ㄱ가 ㄷ를 교대하여 1시간 하고… 세사람이 이렇게 교대하여 한다면 이 일을 다하는데 모두 몇시간 걸리겠습니까?

〔풀이〕 ㄱ, ㄴ, ㄷ가 돌아가면서 1시간씩 하는것 즉 3시간을 한개의 순환으로 볼수 있습니다. 먼저 이 일을 다하는데 대략 몇차례 돌아야 하는가를 봅니다.

$$1 \div \left(\frac{1}{12}+\frac{1}{15}+\frac{1}{18}\right)=$$

$$=1 \div \frac{37}{180}=$$

$$=4\frac{32}{37}(\text{차})$$

이 일을 다하려면 4차례가 더 되여야 합니다. 먼저 4개 순환의 작업량을 구할수 있습니다. 남은 작업량은 후에 고려합니다.

$$1-\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{15}+\frac{1}{18}\right)\times 4=1-\frac{37}{45}=\frac{8}{45}$$

남은 $\frac{8}{45}$을 먼저 ㄱ가 1시간 할 때 남는것은

$$\frac{8}{45}-\frac{1}{12}=\frac{17}{180}$$

ㄴ가 1시간 하였을 때 남는것은

$$\frac{17}{180}-\frac{1}{15}=\frac{1}{36}$$

남은 $\frac{1}{36}$을 ㄷ가 다하는데 걸리는 시간은

$$\frac{1}{36}\div\frac{1}{18}=0.5(\text{시간})$$

그러므로 이 일을 다하는데 걸리는 총시간은 4개 순환 즉 매개 순환 3시간에 2.5시간을 더한것으로 리해할수 있습니다.

$$4\times3+1+1+0.5=14.5(\text{시간})$$

답: 이 일을 다하는데 14.5시간 걸립니다.

〔**례4**〕 한 저수지에 지하수가 네곳으로 들어옵니다. 매 시간 들어오는 물의 량은 고정되여있습니다. ㄱ관을 열면 8시간에 저수지에 찬 물이 다 빠지고 ㄷ관을 열면 12시간에 저수지에 찬 물이 다 빠집니다. 만일 ㄱ, ㄴ 두개 관을 열면 4시간에 저수지에 찬 물을 다 뺄수 있습니다. 만일 ㄴ, ㄷ 두 관을 연다면 몇시간에 저수지에 찬 물을 다 뺄수 있겠습니까?

〔**풀이**〕 문제의 조건에 의하여 이 문제를 풀 때에는 들어오는 물의 량을 고려해야 합니다. 매 시간 들어오는 물의 량을 a라고 합니다. 그러면 ㄱ관의 매 시간 뽑는 량은 $\frac{1}{8}+a$이고 ㄷ관의 매 시간 뽑는 량은 $\frac{1}{12}+a$이고 ㄴ관의 매 시간 뽑는 량은

$$\frac{1}{4}+a-(\frac{1}{8}+a)=\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$$

그러면 ㄴ, ㄷ 두 관의 매 시간 물뽑는 량은

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+a=\frac{5}{24}+a$$

여기서 a는 없앨수 있습니다. 즉 몇시간동안 들어오는 물과 몇시간 빠져나가는 물의 량은 같습니다. 그러므로 단위 1에 $\frac{5}{24}$가 몇개 있는가만 구하면 됩니다. 즉 몇시간에 물을 다 뺄수 있는가를 구할수 있습니다.

$$1\div\frac{5}{24}=4\frac{4}{5}(\text{시간})$$

답: $4\frac{4}{5}$시간이면 저수지에 찬 물을 다 뺄수 있습니다.

〔례5〕 객차는 ㄱ역으로부터 ㄴ역까지 가는데 8시간 걸리고 짐차는 ㄴ역으로부터 ㄱ역까지 가는데 12시간 걸립니다. 두 렬차는 두 역으로부터 동시에 마주 떠나 중간지점에서 39㎞ 떨어진 곳에서 서로 만났습니다. ㄱ, ㄴ 두 역사이의 거리는 몇㎞입니까?

〔풀이〕 이 문제는 거리에 관한 문제입니다. 그러나 실제상 일에 관한 문제를 푸는 방법으로 풀어야 합니다.

일에 관한 문제의 풀이방법으로 하면

$$1\div(\frac{1}{8}+\frac{1}{12})=\frac{24}{5}(\text{시간})$$

$$39\div(\frac{1}{8}\times\frac{24}{5}-\frac{1}{2})=$$

$$=39\div\frac{1}{10}=$$

$$=390(\text{km})$$

답: ㄱ, ㄴ 두 역사이의 거리는 390㎞입니다.

〔례6〕 굵기와 길이가 모두 다른 초 두대가 있습니다. 긴 초는 4시간 켤수 있고 짧은 초는 6시간 켤수 있습니다. 두 초를 동시에 켜서 두시간후 두 초는 남은 길이가 같게 되였습니다. 원래 짧은 초의 길이는 긴 초의 몇분의 몇이겠습니까?

〔풀이〕 문제의 조건에 의하여 일에 관한 문제로 풀수 있습니다. 길고 짧은 두 초를 각각 단위 1로 보면 매 시간 $\frac{1}{4}$과 $\frac{1}{6}$이 탑니다. 그러면 두시간후 긴 초는 $\frac{1}{2}$이 남고 짧은 초는 $\frac{2}{3}$가 남습니다.

이로부터 두 초의 남은 길이가 같다는데 의하여 다음과 같은 것을 얻을수 있습니다.

$$\text{긴 초의 } \frac{1}{2} = \text{짧은 초의 } \frac{2}{3}$$

그러면 긴 초와 짧은 초의 비는

$$\frac{2}{3} : \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \times 2 = 4:3$$

$$3 \div 4 = \frac{3}{4}$$

답: 원래 짧은 초의 길이는 긴 초의 $\frac{3}{4}$입니다.

련습 15－4

1. 어떤 일을 두 작업반이 함께 하면 매일 전체 일의 $\frac{9}{40}$를 할 수 있습니다. ㄱ작업반이 혼자서 3일간 하고 ㄴ작업반이 혼자서 5일간 하면 전체 일의 $\frac{7}{8}$을 할수 있습니다. 만일 ㄴ작업반이 혼자서 한다면 며칠만에 완수할수 있습니까?

2. 어떤 일을 ㄱ작업반이 혼자서 하면 30일간 걸리고 ㄴ작업반이 혼자서 하면 40일간 걸립니다. ㄱ작업반이 먼저 며칠 한 다음 ㄴ작업반과 교대하여 하면 총 35일간 걸립니다. ㄱ작업반은 며칠 일을 하였습니까?

3. 객차와 짐차가 ㄱ, ㄴ 두 역에서 동시에 마주 떠나 6시간 후에 서로 만났습니다. 서로 만난 후 두 렬차는 원래의 속도로 계속 달려 객차는 4시간 걸려서 ㄴ역에 도착하였습니다. 짐차는 이제 몇시간 달려야 ㄱ역에 도착할수 있습니까?

4. 어떤 일을 ㄱ가 혼자서 하면 12시간 걸리고 ㄴ가 혼자서 하면 18시간 걸립니다. 만일 ㄱ가 먼저 1시간 한 다음 ㄴ가 교대하여 1시간 하고 다시 ㄱ가 교대하여 1시간 하고… 두사람이 이렇게 교대하여 하면 일을 다하는데 몇시간 걸립니까?

5. 어떤 일을 ㄱ가 혼자서 하면 6일간에 다할수 있고 ㄱ의

3일간의 작업량을 ㄴ는 4일간에 다할수 있습니다. ㄱ, ㄴ가 함께 2일간 한 후 ㄴ가 혼자서 한다면 ㄴ가 며칠 하여야 다할수 있겠습니까?

6. ㄱ, ㄴ, ㄷ가 함께 담벽을 쌓습니다. ㄱ, ㄴ가 함께 6일간에 담벽의 $\frac{1}{3}$을 쌓고 ㄴ, ㄷ가 함께 2일간에 나머지의 $\frac{1}{4}$을 쌓고 남은것은 세사람이 함께 5일간 쌓아야 다할수 있습니다. 담벽을 쌓은 값으로 공수를 180 받았습니다. 개인이 한 량에 따라 공수를 준다면 매 사람의 공수는 얼마입니까?

7. 저수지에 ㄱ, ㄷ 두개의 물들어오는 관과 ㄴ, ㄹ 두개의 물뽑는 관이 있습니다. 저수지에 물을 가득채우려면 ㄱ관을 하나 열었을 때에는 3시간 걸리고 ㄷ관을 하나 열었을 때는 5시간 걸립니다. 저수지의 물을 다 빼려면 ㄴ관을 하나 열었을 때는 4시간 걸리고 ㄹ관을 하나 열었을 때는 6시간 걸립니다. 지금 저수지에는 $\frac{1}{6}$의 물이 차있습니다. 만일 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㄱ, ㄴ, …의 순서로 돌아가면서 각각 1시간씩 열어놓는다면 몇시간후에 물이 저수지에 넘쳐나겠습니까?

8. ㄱ, ㄴ 두사람은 A곳으로부터 B곳까지 갑니다. ㄱ는 처음 $\frac{1}{3}$의 거리에서 걷는 속도가 4.5㎞/h, 그다음 $\frac{1}{3}$의 거리에서 5㎞/h, 마지막 $\frac{1}{3}$거리에서 걷는 속도가 4㎞/h였습니다. ㄴ는 처음 $\frac{1}{2}$의 거리에서 걷는 속도가 5㎞/h였고 나머지 $\frac{1}{2}$거리에서 걷는 속도가 4㎞/h였습니다. ㄱ는 ㄴ보다 30초 먼저 도착했습니다. A에서 B까지의 거리는 몇㎞입니까?

제16장 비

제1절 비의 의미와 성질

중 점

1. 비의 의미와 성질을 파악하고 비와 나누기, 분수사이의 관계를 알아야 합니다.
2. 분석, 종합, 개괄능력을 키우고 비에 관한 문제를 능숙하게 풀수 있어야 합니다.

〔례1〕 같은 두 병에 알콜용액이 가득차있습니다. 한 병의 알콜과 물의 체적비는 3:1이고 다른 병의 알콜과 물의 체적비는 4:1입니다. 두 병의 알콜용액을 섞었습니다. 이때 알콜과 물의 체적비는 얼마입니까?

〔**풀이**〕 두 병이 같으므로 매 병의 알콜용액을 1이라고 하면 한 병에서는 알콜이 $\frac{3}{1+3}$을 차지하고 물이 $\frac{1}{1+3}$을 차지하며 다른 병에서는 알콜이 $\frac{4}{1+4}$를 차지하고 물이 $\frac{1}{1+4}$을 차지합니다. 두 병의 알콜용액을 섞은 후 알콜은 $\frac{3}{1+3}+\frac{4}{1+4}=\frac{31}{20}$이고 물은 $\frac{1}{1+3}+\frac{1}{1+4}=\frac{9}{20}$입니다. 그러므로 알콜과 물의 체적

비는 $\frac{31}{20}:\frac{9}{20}=31:9$입니다.

답: 알콜과 물의 체적비는 31:9입니다.

〔례2〕 성근이가 걸은 거리는 홍희보다 $\frac{1}{4}$ 많습니다. 홍희가 걸은 시간은 성근이보다 $\frac{1}{10}$ 많습니다. 성근이와 홍희의 속도비를 구하시오.

〔풀이〕 성근이가 걸은 거리는 홍희보다 $\frac{1}{4}$ 많습니다. 즉 홍희가 걸은 거리는 4몫이고 성근이가 걸은 거리는 1+4=5(몫)입니다. 홍희가 걸은 시간은 성근이보다 $\frac{1}{10}$ 많습니다. 즉 성근이가 걸은 시간은 10몫이고 홍희가 걸은 시간은 10+1=11(몫)입니다. 거리를 시간으로 나누면 속도비가 됩니다.

$$(1+4)\div 10:4\div(10+1)=$$

$$=\frac{1}{2}:\frac{4}{11}=$$

$$=11:8$$

답: 성근이와 홍희의 속도비는 11:8입니다.

〔례3〕 ㄱ, ㄴ 두 직4각형의 둘레의 길이는 같습니다. ㄱ의 길이와 너비의 비는 3:2이고 ㄴ의 길이와 너비의 비는 7:5입니다. ㄱ와 ㄴ의 면적의 비를 구하시오.

〔풀이〕 매 직4각형의 둘레의 길이를 2라고 합니다. 그러면 ㄱ의 직4각형의 길이는 $2\div 2\times\frac{3}{3+2}=\frac{3}{5}$, 너비는 $2\div 2\times\frac{2}{2+3}=$ $=\frac{2}{5}$이고 ㄴ의 직4각형의 길이는 $2\div 2\times\frac{7}{7+5}=\frac{7}{12}$, 너비는 $2\div 2\times$ $\times\frac{5}{7+5}=\frac{5}{12}$입니다. 그러므로 ㄱ와 ㄴ의 면적의 비는

$$(\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}):(\frac{7}{12}\times\frac{5}{12})=$$

$$=\frac{6}{25}:\frac{35}{144}=$$

$$=\frac{6}{25}\times\frac{144}{35}=$$

$$=\frac{864}{875}$$

답: ㄱ와 ㄴ의 면적의 비는 864:875입니다.

〔례4〕 ㄱ, ㄴ, ㄷ 세개의 물고뿌와 빈 물통 1개가 있습니다. ㄱ고뿌로 통에 물을 30번 담은 후 통의 물의 체적은 물통용량의 $\frac{2}{5}$였습니다. 다시 ㄴ고뿌로 통에 물을 10번 담은 후 물통의 남은 용량이 또 $\frac{1}{2}$ 줄었습니다. 다시 ㄷ고뿌로 통에 물을 30번 담으니 통에 물이 가득찼습니다. ㄱ, ㄴ, ㄷ 세 고뿌의 체적의 비는 얼마입니까?

〔풀이〕 물통의 용량을 1이라고 합니다. ㄱ고뿌로 30번 담은것이 물통용량의 $\frac{2}{5}$를 차지하므로 ㄱ고뿌의 용량은 $\frac{2}{5}\div30=\frac{1}{75}$입니다. ㄴ고뿌로 10번 담은 후 물통에 남은 용량이 $\frac{1}{2}$로 줄어들었습니다. 즉 $(1-\frac{2}{5})\times\frac{1}{2}=\frac{3}{10}$이므로 ㄴ고뿌의 용량은 $\frac{3}{10}\div$ $\div10=\frac{3}{100}$입니다. ㄷ고뿌의 용량은 $(1-\frac{2}{5}-\frac{3}{10})\div30=\frac{3}{10}\div$ $\div30=\frac{1}{100}$입니다. 그러므로 ㄱ, ㄴ, ㄷ 세 고뿌의 체적의 비는

$$\frac{1}{75}:\frac{3}{100}:\frac{1}{100}=$$

$$=\frac{4}{300}:\frac{9}{300}:\frac{3}{300}=4:9:3$$

답: ㄱ, ㄴ, ㄷ 세 고뿌의 체적의 비는 4:9:3입니다.

〔례5〕 어떤 차의 앞바퀴의 둘레의 길이는 $5\frac{5}{12}$m이고 뒤바퀴의 둘레의 길이는 $6\frac{1}{3}$m입니다. 몇m 전진해야 앞바퀴가 돌아간 회전수가 뒤바퀴가 돌아간 회전수보다 99회 많겠습니까?

〔풀이〕 문제의 조건에 의하여 앞바퀴의 둘레의 길이와 뒤바퀴의 둘레의 길이의 비는 $5\frac{5}{12}:6\frac{1}{3}=65:76$입니다. 즉 앞바퀴가 76회 돌 때 뒤바퀴는 65회 돌며 앞바퀴는 뒤바퀴보다 76－65＝11(회) 더 돕니다. 앞바퀴가 뒤바퀴보다 99회 더 돌 때 전진하는 메터수는

$$5\frac{5}{12}\times76\times(99\div11)=3705(\text{m})$$

답: 3705m 전진합니다.

〔례6〕 길이가 다른 ㄱ, ㄴ, ㄷ 세개 못이 있습니다. ㄱ, ㄴ의 길이의 비는 6:5입니다. ㄱ못의 $\frac{2}{3}$를 벽에 박아넣었습니다. ㄱ와 ㄷ를 벽에 박아넣은 길이의 비는 5:4이고 밖에 남은 부분의 길이는 같습니다.

ㄱ, ㄴ, ㄷ의 길이의 비는 얼마입니까?

〔풀이〕 ㄱ와 ㄴ의 길이의 비는 6:5입니다. ㄱ의 길이를 6이라고 하면 ㄴ의 길이는 5입니다. ㄱ못의 $\frac{2}{3}$를 벽에 박아넣으면 벽안부분의 길이는 $6\times\frac{2}{3}=4$, 밖의 부분은 6－4＝2입니다. ㄱ와 ㄷ못이 벽에 박힌 부분의 길이의 비가 5:4이므로 ㄷ못의 벽안의 길

이는 $4\times\frac{4}{5}=3.2$입니다. 그것들의 벽바깥부분의 길이는 ㄱ와 같으므로 ㄷ못의 길이는 $2+3.2=5.2$입니다.

ㄱ, ㄴ, ㄷ못의 길이의 비는 $6:5:5.2=30:25:26$입니다.

〔례7〕 주머니안에 있는 빨간공과 흰공의 수량의 비는 19:13입니다. 빨간공 몇개를 넣는다면 빨간공과 흰공의 수량의 비는 5:3으로 됩니다. 다시 흰공 몇개를 넣은 후 빨간공과 흰공의 수량의 비는 13:11로 되였습니다. 넣은 빨간공은 흰공보다 80개 적습니다. 원래 주머니안에 공이 모두 몇개 있었습니까?

〔풀이〕 빨간공을 넣은 후 흰공의 량은 변하지 않습니다. $19:13=57:39$, $5:3=65:39$. 원래 빨간공이 $57x$개 있고 흰공이 $39x$개 있었다면 첫번에 $(65-57)x=8x$개의 빨간공을 넣었습니다.

$13:11=65:55$이므로 두번째에 $(55-39)x=16x$개의 흰공을 넣었습니다. 넣은 빨간공이 흰공보다 80개 적으므로

$$16x-8x=80$$

$$x=10$$

원래 주머니에 있은 공은 모두 $(39+57)\times10=960$(개)입니다.

이 문제는 두 비를 각각 일정한 배수로 확대한 다음 같은 몫수에 근거하여 대응관계를 찾는것입니다.

련습 16－1

1. 소금물이 있는데 소금이 $\frac{1}{25}$을 차지합니다. 소금과 물의 비는 얼마입니까?

2. ㄱ, ㄴ 두사람이 달리기경기를 합니다. ㄱ가 달린 거리는 ㄴ보다 $\frac{1}{3}$ 많고 ㄴ가 달린 시간은 ㄱ보다 $\frac{1}{4}$ 많습니다. 두사람의 속도의 비는 얼마입니까?

3. 순수한 알콜 100g을 유리병에 담으니 가득 찼습니다. 10g을 쓴 후 증류수를 채워넣었습니다. 또 10g을 쓴 후 다시 증류수를 채워넣었습니다. 이때 병안의 증류수와 알콜의 비는 얼마입니까?

4. 두 직4각형의 겹친 부분의 면적은 큰 직4각형의 면적의 $\frac{1}{6}$과 같고 작은 직4각형의 면적의 $\frac{1}{4}$과 같습니다. 이 두 직4각형의 면적의 비는 얼마입니까?

5. ㄱ, ㄴ, ㄷ 세개 직6면체의 길이의 비는 2:2:3이고 너비의 비는 3:5:6이고 높이의 비는 6:2:5입니다. ㄷ의 체적이 90㎤라면 ㄱ, ㄴ 두 직6면체의 체적의 합은 몇㎤입니까?

6. 용적이 같은 세개 병에 알콜용액이 가득차있습니다. 알콜과 물의 비는 각각 3:2, 3:1, 4:1입니다. 세병의 알콜용액을 섞은 후 알콜과 물의 비는 얼마입니까?

7. ㄱ, ㄴ 두 과일남새상점에 있는 배의 질량의 비는 5:4입니다. ㄱ상점에서는 45㎏ 팔고 ㄴ상점에는 45㎏ 실어왔습니다. 그리하여 두 상점에 있는 배의 질량의 비가 5:7로 되였습니다. ㄱ상점에 원래 얼마 있었습니까?

8. 3각형의 세 아낙각의 비는 1:4:5입니다. 이 3각형은 무슨 3각형입니까?

9. 순녀와 명일이는 각기 자기 집으로부터 학교로 갔습니다. 순녀는 명일이보다 $\frac{1}{5}$ 더 걷고 명일이가 걸린 시간은 $\frac{1}{7}$ 적습니다. 그러면 순녀와 명일이의 속도비는 얼마입니까?

10. 어느 한 학급의 학생들이 각각 체육소조와 음악소조에 참가하였습니다. 두개 소조에 참가한 학생은 체육소조에 참가한 학생의 $\frac{1}{5}$이고 음악소조에 참가한 학생의 $\frac{2}{9}$입니다. 체육소조

에만 참가한 학생수와 음악소조에만 참가한 학생수의 비는 얼마입니까?

11. 수학경연에 참가한 남학생의 $\frac{5}{6}$는 녀학생의 $\frac{2}{3}$와 같습니다. 그러면 수학경연에 참가한 남학생과 녀학생의 비는 얼마입니까?

12. 직4각형과 바른4각형의 둘레의 길이는 같습니다. 직4각형의 너비는 길이보다 $\frac{4}{5}$ 작습니다. 그러면 이 직4각형과 바른4각형의 면적의 비는 얼마입니까?

13. 한 용기에 물이 가득 찼습니다. 지금 대, 중, 소 세가지 뽈이 있습니다. 첫번에는 소형뽈을 물에 잠그고 두번째에는 소형뽈을 꺼내고 중형뽈을 물에 잠그었으며 세번째에는 중형뽈을 꺼내고 소형뽈과 대형뽈을 함께 물에 잠그었습니다.

매번 용기에서 넘쳐난 물의 량을 본다면 첫번에는 두번째의 $\frac{1}{4}$이고 세번째는 첫번째의 3배입니다. 세 뽈의 체적비를 구하시오.

14. 도형에서 빗선을 친 부분의 면적은 원면적의 $\frac{1}{6}$을 차지하고 바른4각형면적의 $\frac{1}{5}$을 차지합니다. 3각형의 빗선을 친 부분의 면적은 3각형면적의 $\frac{1}{9}$을 차지하고 바른4각형면적의 $\frac{1}{4}$을 차지합니다. 원, 바른4각형, 3각형의 면적의 비는 얼마입니까?(그림 47)

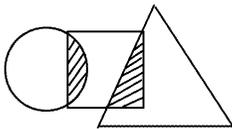



그림 47

제2절 비례분배문제

중 점

1. 비례분배의 방법으로 비와 관계되는 응용문제를 풀줄 알아야 합니다.

2. 응용문제에서 변하는 량과 변하지 않는 량의 관계를 잘 알고 이런 류형의 문제를 능숙하게 풀어야 합니다.

〔례1〕 직6면체의 모든 길이의 합은 216㎝이고 그것의 길이, 너비, 높이의 비는 4:3:2입니다. 직6면체의 겉면적과 체적은 각각 얼마입니까?

〔**풀이**〕 직6면체의 변의 길이는 길이, 너비, 높이 세가지로 나눌수 있습니다. 그러므로 길이, 너비, 높이의 합은 $216\div4=54$(㎝)입니다. 길이, 너비, 높이의 비가 4:3:2라는데 의하여 직6면체의 길이는 $54\times\frac{4}{4+3+2}=24$(㎝), 너비는 $54\times\frac{3}{4+3+2}=18$(㎝), 높이는 $54\times\frac{2}{4+3+2}=12$(㎝)라는것을 알수 있습니다.

직6면체의 겉면적은

$$(24\times18+24\times12+18\times12)\times2=$$
$$=936\times2=$$
$$=1872(\text{cm}^2)$$

직6면체의 체적은

$$24\times18\times12=5184(\text{cm}^3)$$

답: 직6면체의 겉면적과 체적은 각각 1872㎠와 5184㎤입니다.

〔례2〕 어느 한 중학교의 6학년 학생들은 세개조로 나뉘여 3대혁명전시관을 참관합니다. 1조와 2조의 학생수의 비는 5:4이고 2조와 3조의 학생수의 비는 3:2입니다. 1조는 2조와 3조의 학생수의 합보다 15명 적습니다. 6학년에서 참관한 학생은 몇명입니까?

〔풀이〕 1조와 2조의 학생수비는 5:4 즉 $(5\times3):(4\times3)=15:12$입니다. 2조와 3조의 학생수비는 3:2 즉 $(3\times4):(2\times4)=12:8$입니다. 이로부터 1조, 2조, 3조의 학생수의 비가 15:12:8이라는것을 알수 있습니다. 1조는 총학생수의 $\frac{15}{15+12+8}=\frac{3}{7}$을 차지하고 2조와 3조는 $\frac{12+8}{15+12+8}=\frac{4}{7}$를 차지합니다. 1조는 2조와 3조의 합보다 $\frac{4}{7}-\frac{3}{7}=\frac{1}{7}$이 작은데 이것이 바로 15명입니다.

그러므로 6학년에서 참관한 학생수는

$$15\div\frac{1}{7}=105(\text{명})\text{입니다.}$$

답: 105명

〔례3〕 명호가 그림책을 읽습니다. 이미 읽은 책페지수와 읽지 못한 페지수의 비는 1:5입니다. 만일 30페지를 더 읽는다면 읽은 페지수와 읽지 못한 페지수의 비가 3:5로 됩니다. 이 책은 모두 몇페지입니까?

〔풀이〕 읽은 페지수와 읽지 못한 페지수의 비가 1:5라는것으로부터 읽은 페지수가 총페지수의 $\frac{1}{1+5}$을 차지한다는것을 알수 있습니다. 만일 30페지를 더 읽는다면 읽은 페지수가 총페지수의 $\frac{3}{3+5}$을 차지합니다.

이것은 원래보다 총페지수의 $\frac{3}{8}-\frac{1}{6}=\frac{5}{24}$가 많습니다. 이것이 바로 30페지이므로 이 책의 총페지수는

$$30\div\frac{5}{24}=144(\text{페지})$$

답: 이 책은 모두 144페지입니다.

여기서 변하는 량은 읽은 페지수와 읽지 못한 페지수이고 변하지 않는 량은 총페지수입니다.

〔례4〕 ㄱ, ㄴ 두 통의 기름은 모두 130kg입니다. ㄱ통에서 $\frac{2}{7}$를 쏟아 ㄴ통에 넣은 후 ㄱ통과 ㄴ통의 기름의 비가 7:6으로 되였습니다. 원래 ㄱ, ㄴ 두 통에 기름이 각각 몇kg 있었겠습니까?

〔풀이〕 ㄱ통에서 $\frac{2}{7}$를 쏟아 ㄴ통에 넣은 후 ㄱ, ㄴ 두 통의 기름은 여전히 130kg입니다. 이때 두 통의 기름의 비가 7:6이므로 이때 ㄱ통의 기름은 $130\times\frac{7}{7+6}=70(\text{kg})$입니다. ㄱ통에서 $\frac{2}{7}$를 쏟아냈기때문에 ㄱ통의 기름은 원래 기름의 $1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$에 해당됩니다. 그러므로 ㄱ통에 원래 있은 기름은

$$70\times\frac{7}{5}=98(\text{kg})$$

ㄴ통에 원래 있은 기름은

$$130-98=32(\text{kg})$$

답: ㄱ, ㄴ 두 통에 원래 기름이 각각 98kg과 32kg이 있었습니다.

〔례5〕 ㄱ, ㄴ 두 창고에 쌀이 모두 240t 저장되여있습니다. 그중에서 ㄱ창고의 저장량의 $\frac{1}{3}$과 ㄴ창고의 저장량의 $\frac{1}{5}$이 같습니다. ㄱ, ㄴ 두 창고에 각각 쌀을 몇t 저장하였겠습니까?

〔**풀이**〕 ㄱ창고의 저장량의 $\frac{1}{3}$이 ㄴ창고의 저장량의 $\frac{1}{5}$과 같다는데 의하여 갈기식을 세울수 있습니다.

ㄱ창고의 저장량$\times\frac{1}{3}=$ㄴ창고의 저장량$\times\frac{1}{5}$

ㄱ창고의 저장량:ㄴ창고의 저장량$=\frac{1}{5}:\frac{1}{3}=3:5$

ㄱ창고의 저장량은 $240\times\frac{3}{3+5}=90(t)$

ㄴ창고의 저장량은 $240-90=150(t)$

답: ㄱ창고에 쌀을 90t 저장하고 ㄴ창고에는 150t 저장하였습니다.

련습 16－2

1. 어느 한 소학교에서 합창에 남학생과 녀학생들이 참가하였는데 그 비는 1:2입니다. 그런데 도중에 시험을 쳐서 몇명을 골라내였습니다. 이때 합격된 남학생과 녀학생의 비는 3:8이고 합격되지 못한 남학생과 녀학생의 비는 5:2였습니다. 합격되지 못한 학생은 14명이였습니다. 모두 몇명이 합격되였습니까?

2. ㄱ, ㄴ 두 수의 비는 5:7이고 ㄴ, ㄷ 두 수의 비는 3:4입니다. ㄱ, ㄴ 두 수의 합은 84입니다. ㄴ, ㄷ 두 수의 합은 얼마입니까?

3. 어느 학교의 성악소조와 무용소조의 학생의 비는 3:1입니다. 만일 성악소조에서 10명을 무용소조에 보낸다면 이때 학생들의 비는 7:8로 됩니다. 원래 성악소조에 몇명 있었습니까?

4. 세 통의 기름의 총질량은 45kg입니다. 첫번째 통과 두번째 통에서 각각 2.5kg 쏟아 세번째 통에 넣는다면 첫번째 통, 두번째 통, 세번째 통의 기름의 질량의 비는 1:2:3으로 됩니다. 세 통에 기름이 원래 각각 몇kg 있었습니까?

5. 크고작은 두병의 기름의 총질량은 2.7kg입니다. 큰 병의

기름을 $\frac{1}{4}$ 쏟아 작은 병에 넣은 후 큰병과 작은 병의 기름의 질량의 비는 3:2였습니다. 큰 병과 작은 병에 기름이 각각 몇kg 있었겠습니까?

6. 식물원에 있는 국화와 백일홍의 화분수의 비는 31:5이고 란초와 수련의 화분수의 비는 40:9이며 백일홍과 수련의 화분수의 비는 25:3입니다. 식물원에 란초는 200개 있습니다. 국화는 몇개 있습니까?

7. 저수지의 물면에 나무말뚝이 2개 서있습니다. 이 말뚝의 물면우와 아래면의 길이의 비는 10:1입니다. 물면이 20㎝ 내려간 후 물면우와 아래의 말뚝의 길이의 비는 5:2입니다. 이 말뚝의 원래 물면우의 부분은 몇㎝였겠습니까?

8. 크고작은 두 광주리의 사과값의 비는 3:2이고 그 량의 비는 4:5입니다. 두 광주리의 사과를 판 총값은 330원입니다. 그러면 큰 광주리와 작은 광주리의 사과값은 각각 얼마입니까?

9. ㄱ, ㄴ 두 사람이 걷는 속도의 비는 13:11입니다. ㄱ, ㄴ 두 사람이 각각 A, B 두곳에서 동시에 마주 떠나 0.5시간후에 서로 만났습니다. 만일 같은 방향으로 걷는다면 ㄱ가 ㄴ를 따라잡는데 몇시간 걸립니까?

10. ㄱ, ㄴ, ㄷ 세 사람이 공원에 놀러갑니다. ㄱ는 3kg의 사과를 사고 ㄴ는 빵 6개를 사고 ㄷ는 단물 3병을 샀습니다. ㄴ가 쓴 돈은 ㄱ의 $\frac{12}{13}$이고 ㄷ가 쓴 돈은 ㄴ의 $\frac{2}{3}$입니다. ㄷ는 세가지 상품의 값에 의하여 3원을 ㄱ와 ㄴ에게 나누어주었습니다. ㄱ와 ㄴ는 각각 몇원씩 가져야 합니까?

11. 과수농장에서 가져온 사과를 질에 따라 세개등급으로 나누었습니다. 제일 큰 사과는 1kg에 3.6원씩 팔고 중등정도의 사과는 1kg에 2.8원씩 팔고 작은 사과는 1kg에 2.1원씩 팔았습니다. 이 세가지 사과의 수량의 비는 2:3:1입니다. 만일 이 세가지 사과를 한데 섞어서 판다면 1kg에 얼마를 해야 하겠습니까?

12. ㄱ, ㄴ 두 무지에 석탄이 모두 315t 있습니다. 이것의 비는 1:4입니다. 후에 ㄱ무지에 석탄을 얼마 더 실어왔을 때 ㄱ, ㄴ 두 무지의 석탄의 비가 3:7로 되였습니다. ㄱ무지에 석탄을 몇t 실어 왔습니까?

13. 직각제형의 둘레의 길이는 24㎝이고 두 밑변의 합과 두 옆변의 합의 비는 2:1입니다. 그중의 한 옆변과 다른 한 옆변의 비는 3:5입니다. 제형의 면적을 구하시오.

14. 어느 한 나라에서는 자동차가 다리를 건느면 3원을 내고 말이 다리를 건느면 2원을 내며 사람이 다리를 건느면 1원을 냅니다. 어느날 다리를 건느는 자동차와 말의 비는 2:9이고 말과 사람의 비는 3:7인데 모두 315원을 받았습니다. 이날 다리를 건는 자동차, 말, 사람은 각각 얼마입니까?

15. 사과 두 광주리를 세개 반에 나누어줍니다. ㄱ반은 전체 사과의 $\frac{2}{5}$를 가지고 ㄴ반과 ㄷ반이 가진 사과의 비는 7:5입니다. 두번째 광주리사과는 첫번째 광주리사과의 $\frac{9}{10}$입니다. 만일 첫번째 광주리에서 20kg 꺼내 두번째 광주리에 넣는다면 두 광주리의 사과의 무게가 같게 됩니다. 그러면 ㄱ반은 ㄴ반보다 사과를 몇kg 더 가졌겠습니까?

제17장 비례식

제1절 비례식의 의미와 기본성질

중 점

1. 비례식의 의미와 기본성질에 근거하여 생활속의 실제문제를 해결할줄 알아야 합니다.

2. 비례식의 의미를 응용하여 두개 수량사이의 비로 전환시켜 문제를 풀줄 알아야 합니다.

〔례1〕 $\frac{1992}{1993}$의 분자에서 한 수를 덜고 분모에 그 수를 더한 다음의 분수의 값은 $\frac{2}{3}$입니다. 그 수를 구하시오.

〔풀이〕 그 수를 x라고 하면

$$\frac{1992-x}{1993+x}=\frac{2}{3}$$

$$(1992-x)\times 3=(1993+x)\times 2$$

$$5976-3x=3986+2x$$

$$3x+2x=5976-3986$$

$$5x=1990$$

$$x=398$$

답: 그 수는 398입니다.

〔례2〕 ㄱ, ㄴ 두 창고에 저장한 쌀의 총량은 360t입니다. 그가운데서 ㄱ창고에 저장한 쌀의 $\frac{1}{4}$과 ㄴ창고에 저장한 쌀의 $\frac{1}{5}$이 같습니다. 두 창고에 쌀을 각각 몇t 저장하였습니까?

〔풀이〕 ㄱ창고에 저장한 쌀의 $\frac{1}{4}$과 ㄴ창고에 저장한 쌀의 $\frac{1}{5}$이 같다는데 근거하여 다음과 같은것을 알수 있습니다.

ㄱ창고에 저장한 쌀$\times\frac{1}{4}=$ㄴ창고에 저장한 쌀$\times\frac{1}{5}$

ㄱ창고에 저장한 쌀:ㄴ창고에 저장한 쌀$=\frac{1}{5}:\frac{1}{4}=4:5$

ㄱ창고에 저장한 쌀은 총량의 $\frac{4}{4+5}$이고 ㄴ창고에 저장한 쌀은 총량의 $\frac{5}{4+5}$이므로 두 창고에 쌀을 저장한것은 다음과 같습니다.

ㄱ창고: $360\times\frac{4}{4+5}=160(\text{t})$

ㄴ창고: $360\times\frac{5}{4+5}=200(\text{t})$

답: 두 창고에 저장한 쌀은 각각 160t과 200t입니다.

〔례3〕 ㄱ, ㄴ 두 학생의 점수비는 5:4입니다. 만일 ㄱ가 22.5점을 적게 받고 ㄴ가 22.5점을 더 맞았다면 그들의 점수비는 5:7로 됩니다. ㄱ, ㄴ 두 학생은 각각 몇점을 받았겠습니까?

〔풀이〕 ㄱ, ㄴ 두 학생의 원래의 점수비가 5:4라는데 의하여 원래 두 학생의 매몫의 점수를 x라고 하면 ㄱ학생이 받은 점수는 $5x$이고 ㄴ가 받은 점수는 $4x$입니다. 문제에 의하여 다음과 같은

것을 알수 있습니다.

$$\frac{5x-22.5}{4x+22.5}=\frac{5}{7}$$

$$(5x-22.5)\times 7=(4x+22.5)\times 5$$

$$35x-157.5=20x+112.5$$

$$35x-20x=112.5+157.5$$

$$15x=270$$

$$x=18$$

그러므로 ㄱ가 원래 받은 점수는 $18\times 5=90$(점)

ㄴ가 받은 점수는 $18\times 4=72$(점)

답: ㄱ는 90점을 받고 ㄴ는 72점을 받았습니다.

〔례4〕 ㄱ, ㄴ 두개 반의 학생수는 같습니다. 매 반에서 일부 학생들은 수학소조에 참가하였습니다. ㄱ반에서 참가한 학생은 ㄴ반에서 참가하지 않은 학생의 $\frac{1}{3}$이고 ㄴ반에서 참가한 학생수는 ㄱ반에서 참가하지 않은 학생수의 $\frac{1}{4}$입니다. ㄱ반에서 참가하지 않은 학생수는 ㄴ반에서 참가하지 않은 학생수의 몇분의 몇입니까?

〔풀이〕 ㄱ, ㄴ 두 반의 학생수가 같기때문에 ㄱ반에서 참가한 학생수+ㄱ반에서 참가하지 않은 학생수=ㄴ반에서 참가한 학생수+ +ㄴ반에서 참가하지 않은 학생수입니다.

조건으로부터 ㄴ반에서 참가하지 않은 학생수$\times\frac{1}{3}$+ㄱ반에서 참가하지 않은 학생수=ㄱ반에서 참가하지 않은 학생수$\times\frac{1}{4}$+ㄴ반에서 참가하지 않은 학생수

정리하면

ㄱ반에서 참가하지 않은 학생수$\times\frac{3}{4}$=ㄴ반에서 참가하지 않은 학생수$\times\frac{2}{3}$

그러므로 ㄱ반에서 참가하지 않은 학생수:ㄴ반에서 참가하지 않은 학생수$=\frac{2}{3}:\frac{3}{4}=8:9=\frac{8}{9}$

답: ㄱ반에서 참가하지 않은 학생수는 ㄴ반에서 참가하지 않은 학생수의 $\frac{8}{9}$입니다.

〔례5〕 손칼 한개값은 3원입니다. 만일 명호가 이 손칼을 산다면 명호와 강일이의 돈의 비는 2:5로 됩니다. 만일 강일이가 이 손칼을 산다면 두 사람의 돈은 8:13으로 됩니다. 명호와 강일이에게 원래 각각 몇원 있었겠습니까?

〔풀이〕 만일 명호가 이 손칼을 산다면 명호와 강일이의 돈의 비는 2:5입니다. 즉 명호가 가진 돈은 강일이의 $\frac{2}{5}$입니다. 명호에게 원래 있는 돈을 x원이라고 한다면 강일이에게 있는 돈은 $(x-3)\times\frac{5}{2}$입니다.

강일이가 이 손칼을 산다면 두 학생의 돈의 비는 8:13이라는데 의하여

$$\frac{(x-3)\times\frac{5}{2}-3}{x}=\frac{13}{8}$$

$$\frac{2\frac{1}{2}x-7\frac{1}{2}-3}{x}=\frac{13}{8}$$

$$(2\frac{1}{2}x-10\frac{1}{2})\times 8=13x$$

$$20x-84=13x$$
$$20x-13x=84$$
$$x=12$$

그러므로 강일이에게 원래 있은 돈은

$$(12-3)\times\frac{5}{2}=22.5(\text{원})$$

답: 명호 12원, 강일 22.5원

〔례6〕 두 통에 같은 량의 기름이 담겨있습니다. 첫번째 통의것은 $\frac{1}{4}$ 쓰고 두번째 통의것은 40% 쓴 후 다시 첫번째 통에서 기름 8kg 꺼내 두번째 통에 넣었을 때 두번째 통과 첫번째 통의 기름의 비는 13:14입니다. 두 통에 원래 기름이 각각 몇kg 있었겠습니까?

〔풀이〕 두 통에 기름이 같게 들어있습니다. 매 통에 기름이 $x$kg 들어있다고 하면 문제의 조건에 의하여 다음과 같은 비례식을 세울수 있습니다.

$$\frac{(1-\frac{1}{4})x-8}{(1-40\%)x+8}=\frac{14}{13}$$

$$(\frac{3}{4}x-8)\times 13=(\frac{3}{5}x+8)\times 14$$

$$x=160(\text{kg})$$

답: 두 통에 원래 기름이 각각 160kg 들어있었습니다.

〔례7〕 굵기와 길이가 다른 초가 두대 있습니다. 한대는 3.5시간 탈수 있고 다른 한대는 5시간 탈수 있습니다. 2시간 탔을 때 두대의 길이가 같아졌습니다. 초의 두대의 길이의 비는 얼마입니까?

〔풀이〕 긴 초의 길이를 x라고 하고 짧은 초의 길이를 y라고 하면 문제에 의하여 다음과 같은 같기식을 세울수 있습니다.

$$(1-\frac{2}{3.5})x=(1-\frac{2}{5})y$$

$$\frac{3}{7}x=\frac{3}{5}y$$

$$x:y=\frac{3}{5}:\frac{3}{7}=7:5$$

답: 두 초의 길이의 비는 7:5입니다.

련습 17-1

1. 분수 $\frac{1997}{2000}$의 분자와 분모에 동시에 자연수 얼마를 더하면 새로운 분수 $\frac{2000}{2001}$을 얻을수 있습니까?

2. 두 사람은 A곳으로부터 동시에 출발하여 B곳으로 갑니다. 한 사람은 같은 속도로 전체 거리를 3시간에 다 가고 다른 한 사람은 같은 속도로 전체 거리를 4시간에 다 갔습니다. 몇시간 지났을 때 한사람의 남은 거리가 다른 사람의 남은 거리의 2배로 되겠습니까?

3. 분수 $\frac{8}{23}$의 분자와 분모에 같은 씨수를 더하면 분수는 $\frac{5}{8}$로 됩니다. 그 씨수는 얼마입니까?

4. ㄱ, ㄴ 두 통에 기름이 모두 340kg 있습니다. 만일 ㄱ통의 기름을 $\frac{1}{3}$ 쓰고 ㄴ통의 기름을 $\frac{1}{4}$ 쓴다면 두 통에 남은 기름은 같게 됩니다. ㄱ, ㄴ통의 기름질량은 각각 얼마입니까?

5. A, B 두가지 상품의 가격비는 7:3입니다. 만일 그것들의 가격을 각각 700원씩 올린다면 가격비는 7:4로 됩니다. A, B 상품값은 원래 각각 얼마입니까?

6. ㄱ직장에는 ㄴ직장보다 20명 더 많습니다. 만일 ㄱ직장에서 64명을 보내고 ㄴ직장에서 32명을 보낸다면 ㄱ, ㄴ 두 직장의 로동자수의 비는 3:4로 됩니다. ㄱ, ㄴ 직장에 각각 몇명씩 있었습니까?

7. ㄱ, ㄴ 두 차는 A, B 두곳에서 동시에 마주 떠났습니다. 두 차가 서로 만난 후 ㄱ차는 3.2시간 더 달려 B곳에 도착하고 ㄴ차는 5시간 더 달려 A곳에 도착했습니다. ㄱ, ㄴ 두 차는 전체 거리를 달리는데 각각 몇시간 걸렸겠습니까?

8. ㄱ, ㄴ 두 창고에 있는 화물의 비는 6:5입니다. 후에 ㄱ창고에 화물을 180t 들여오고 ㄴ창고에 화물을 30t 들여왔습니다. 이때 ㄱ창고와 ㄴ창고에 있는 화물의 비는 18:11입니다. 원래 두 창고에 화물이 모두 몇t 있었겠습니까?

9. 기능공과 견습공이 같은 수량의 부속품을 가공합니다. 동시에 며칠 가공한 후 기능공이 가공한 부속품은 견습공이 가공하지 못한 부속품의 $\frac{1}{4}$이고 견습공이 가공한 부속품은 기능공이 가공하지 못한 부속품의 $\frac{1}{5}$이였습니다. 기능공과 견습공이 가공하지 못한 부속품의 개수의 비는 몇 대 몇입니까?

10. ㄱ, ㄴ, ㄷ 세 수가 있습니다. ㄱ수의 $\frac{1}{3}$은 ㄴ수의 $\frac{4}{15}$와 같고 ㄴ수의 $\frac{1}{5}$은 ㄷ수의 $\frac{1}{6}$과 같고 ㄷ수는 ㄱ수보다 60 큽니다. ㄱ, ㄴ, ㄷ 세 수의 합은 얼마입니까?

11. ㄱ, ㄴ 두 문서원이 함께 15400자인 원고를 타자합니다. ㄱ가 $\frac{5}{6}$를 치고 ㄴ가 80%를 쳤을 때 두 사람이 타자하지 못한 글자수가 같았습니다. ㄱ는 총 몇글자를 쳐야 합니까?

12. 방철이와 원일에게는 바둑알을 담은 통이 각각 하나씩 있습니다. 두 통에는 바둑알이 모두 360알 있습니다. 방철이가 자기 통에서 바둑알의 $\frac{1}{4}$을 꺼내 원일이의 통에 넣었더니 원일이의 통에 있는 바둑알수는 원래보다 $\frac{1}{5}$ 늘어났습니다. 방철이와 원일에게

원래 바둑알이 각각 몇알 있었습니까?

13. 명호는 일정한 속도로 어떤 길을 걷습니다. 만일 그가 매 시간 0.5㎞씩 더 걷는다면 시간을 $\frac{1}{5}$ 절약할수 있고 매 시간에 0.5㎞씩 적게 걷는다면 2.5시간이 더 걸리게 됩니다. 이 길은 몇㎞입니까?

14. 나무를 심는데 만일 나무를 혼자서 심는다면 ㄱ는 ㄴ보다 $\frac{1}{3}$시간 더 걸립니다. 만일 두 사람이 함께 심어 일을 끝낸다면 ㄴ는 ㄱ보다 36그루 더 심습니다. 이 나무는 몇그루입니까?

15. ㄱ, ㄴ, ㄷ 세개의 모형비행기가 있습니다. ㄱ가 공중에 떠있는 시간의 $\frac{2}{3}$는 ㄴ가 공중에 떠있은 시간의 $\frac{4}{7}$와 같습니다. ㄴ가 공중에 떠있는 시간의 $\frac{2}{3}$는 ㄷ가 공중에 떠있은 시간의 $\frac{4}{7}$와 같습니다. 만일 ㄷ가 공중에 떠있은 시간이 ㄱ보다 13분 더 많다면 ㄴ는 공중에 얼마나 떠있었겠습니까?

제2절 정비례와 반비례

중 점

1. 두 량이 비례되는가, 어떤 비례인가를 알아야 합니다.

2. 두 량이 정비례되거나 반비례되는 관계를 응용하여 생활속의 실제문제를 풀줄 알아야 합니다.

〔례1〕 ㄱ, ㄴ 두 사람이 각각 A, B 두곳에서 동시에 마주 떠

났습니다. 떠날 때 그들의 속도비는 3:2입니다. 그들이 처음 만난 후 ㄱ의 속도는 20% 빨라지고 ㄴ의 속도는 30% 빨라졌습니다. 그리하여 ㄱ가 B곳에 도착했을 때 ㄴ는 A곳에서 14㎞ 떨어져있었습니다. A, B 두곳사이의 거리는 몇㎞입니까?

〔풀이〕 그들이 처음 만날 때까지 걸은 시간이 같으므로 ㄱ, ㄴ 두 사람이 걸은 거리의 비도 3:2입니다.

서로 만난 후 ㄱ, ㄴ 두 사람의 속도비는

$$[3\times(1+20\%)]:[2\times(1+30\%)]=3.6:2.6=18:13$$

입니다. ㄱ가 B곳에 도착했을 때 즉 ㄱ가 2몫의 거리를 걸었을 때 ㄴ가 걸은 거리와 ㄱ가 걸은 거리의 비는 18:13입니다. 즉 ㄴ의 거리는 $2\times\frac{13}{18}=1\frac{4}{9}$(몫)입니다. ㄴ는 서로 만난 후 A곳까지 가려면 아직 $3-1\frac{4}{9}=1\frac{5}{9}$(몫)이 남습니다. 이것이 바로 남은 14㎞입니다. 그러므로 한몫의 거리는 $14\div1\frac{5}{9}=9$(㎞)입니다. A, B 두곳사이에는 이런것이 3+2=5(몫)이 있습니다.

그러므로 A, B 두곳사이의 총거리는

$$[3\times(1+20\%)]:[2\times(1+30\%)]=18:13$$

$$14\div(3-2\times\frac{13}{18})=14\div1\frac{5}{9}=9(\text{km})$$

$$9\times(3+2)=45(\text{km})$$

답: A, B 두곳사이의 거리는 45㎞입니다.

이 문제는 시간이 일정할 때 거리와 속도가 정비례되는 관계에 의거하여 푸는 문제입니다.

〔례2〕 어떤 사람이 자전거를 타고 집으로부터 군소재지까지 가는데 원래 5시간 30분 걸릴것으로 계획하였습니다. 그런데 도중에 $3\frac{3}{5}$㎞의 길이 좋지 못해 원래의 속도의 $\frac{3}{4}$밖에 속도를 내지 못하였습니다. 그리하여 계획보다 12분 늦게 도착했습니다. 이 사람

의 집으로부터 군소재지까지는 몇㎞입니까?

〔풀이〕 12분 늦게 도착했다는것은 계획보다 12분 더 걸렸다는 것입니다. 이것은 도중에 $3\frac{3}{5}$㎞의 길이 좋지 못해 그렇게 된것입니다. $3\frac{3}{5}$㎞의 길을 간 속도는 원래의 $\frac{3}{4}$이였기때문에 걸린 시간은 원래의 $\frac{4}{3}$입니다. 이것은 원래보다 $\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}$의 시간이 더 걸립니다. 원래 $3\frac{3}{5}$㎞의 길을 가는데 걸리는 시간은 $12\div\frac{1}{3}=$ $=36$(분)$=\frac{3}{5}$(시간)입니다. 원래 매 시간에 $3\frac{3}{5}\div\frac{3}{5}=6$(㎞) 갑니다. 그 사람의 집으로부터 군소재지까지의 거리는

$$5\text{시간 }30\text{분}=5\frac{1}{2}\text{시간}$$

$$12\div\left(\frac{4}{3}-1\right)=36\text{분}=\frac{3}{5}\text{시간}$$

$$3\frac{3}{5}\div\frac{3}{5}\times5\frac{1}{2}=6\times5\frac{1}{2}=33(\text{㎞})$$

답: 집으로부터 군소재지까지의 거리는 33㎞입니다.

〔례3〕 자동차가 남북방향으로 된 길에서 달립니다. 남에서 북을 향해 바람을 마주하여 달릴 때에는 매 시간에 50㎞씩 달리고 북에서 남을 향해 바람을 등지고 달릴 때에는 매 시간에 70㎞씩 달립니다. 두 자동차는 같은 곳에서 동시에 출발하여 바람을 등지고 달립니다. 한 자동차는 북쪽으로 갔다가 다시 돌아오고 다른 한 자동차는 남쪽으로 갔다가 다시 돌아왔습니다. 결과 4시간후 두 자동차는 동시에 출발점에 돌아왔습니다. 만일 차를 돌리는 시간을 계산하지 않는다면 4시간내에 같은 방향으로 달린 시간은 몇시간이겠습니까?

〔풀이〕 두 차가 동시에 출발점에 돌아왔습니다. 이것은 두 차

가 달린 거리가 같다는것을 말해줍니다. 바람을 마주 향해 달린 속도와 바람을 등지고 달린 속도의 비가 70:50=7:5이므로 바람을 등지고 달린 시간과 바람을 마주 향해 달린 시간의 비는 5:7입니다. 바람을 등지고 달린 시간은 $4\times\frac{5}{5+7}=\frac{5}{3}$(시간)이고 바람을 마주 향해 달린 시간은 $4\times\frac{7}{5+7}=\frac{7}{3}$(시간)입니다. 두 차가 달린 방향이 같은 시간은 $\frac{7}{3}-\frac{5}{3}=\frac{2}{3}$(시간)입니다.

〔례4〕 두 형제가 공원 문어구로부터 길을 따라 동쪽으로 어느 곳에 가려고 합니다. 그들이 집으로 가려면 공원문어구로부터 길을 따라 서쪽으로 가야 합니다. 두 형제는 먼저 집에 가서 자전거를 타고 어느곳까지 가는것이 시간이 적게 걸리겠는가 아니면 공원문어구로부터 계획된 곳까지 걸어가는것이 시간이 더 걸리겠는가 의논해보았습니다. 형은 다음과 같이 계산하였습니다. 자전거를 타는 속도와 걷는 속도의 비는 4:1입니다. 공원문어구로부터 계획된 지점까지의 거리가 2㎞를 넘을 때에는 집에 돌아가 자전거를 타는것이 더 좋다고 생각했습니다. 그러면 공원문어구로부터 그들의 집까지의 거리는 몇㎞입니까?

〔풀이〕 문제의 조건으로부터 다음과 같은것을 알수 있습니다. 공원문어구로부터 계획한 곳까지의 거리가 2㎞일 때 두가지 방법이 다 걸리는 시간이 같습니다. 공원문어구로부터 집까지의 거리를 x㎞라고 하면

$$\frac{2-x}{x+2}=\frac{1}{4}$$

$$8-4x=x+2$$

$$x=1.2(\text{㎞})$$

답: 공원문어구로부터 집까지의 거리는 1.2㎞입니다.

〔례5〕 자동차가 A도시로부터 B도시로 갑니다. 만일 속도를 20%

높인다면 원래 계획한 시간보다 1시간 앞당겨 B도시에 도착할수 있고 만일 원래의 속도로 100㎞ 달린 후 다시 속도를 30% 높인다면 원래 계획한 시간보다 1시간 앞당겨 B도시에 도착할수 있습니다. A, B 두 도시사이의 거리는 몇㎞입니까?

〔**풀이**〕 만일 속도를 20% 높인다면 속도는 원래의 $1+20\%=$ $=\frac{6}{5}$으로 됩니다. 그러면 B도시에 도착하는데 걸리는 시간은 원래의 $\frac{5}{6}$이고 본래보다 $1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$의 시간이 적게 걸립니다. 이것이 바로 1시간이므로 원래 전체 거리를 가는데 걸리는 시간은 $1\div\frac{1}{6}=6$(시간)입니다. 만일 먼저 원래의 속도로 100㎞ 달리고 남은 거리에서의 속도가 원래의 $1+30\%=\frac{13}{10}$이면 걸리는 시간은 원래의 $\frac{10}{13}$이고 본래보다 $1-\frac{10}{13}=\frac{3}{13}$의 시간이 적게 걸립니다. 이것이 바로 1시간입니다. 그러면 원래 남은 거리를 가는데 걸리는 시간은 $1\div\frac{3}{13}=\frac{13}{3}$(시간)입니다. 100㎞를 달리는데 걸리는 시간은 $6-\frac{13}{3}=\frac{5}{3}$(시간)입니다. 그러므로 매 시간에 달리는 거리는 $100\div\frac{5}{3}=60$(㎞)입니다.

A, B 두 도시사이의 거리는 $60\times6=360$(㎞)입니다.

〔**례6**〕 배 한척이 ㄱ, ㄴ 두 항구사이를 왕복합니다. 고요한 물에서의 배의 속도는 매 시간에 9㎞이고 물을 거슬러 항행하는것과 물을 따라 항행하는데 걸린 시간비는 2:1입니다. 어느날 폭우가 쏟아져 물이 흐르는 속도가 원래의 2배로 되였기때문에 이 배가 왕복하는데 모두 10시간 걸렸습니다. ㄱ, ㄴ 두 항구사이의 거리는 몇㎞입니까?

〔**풀이**〕 물을 거슬러 항행하는것과 물을 따라 항행하는데 걸리는 시간비가 2:1이므로 속도비는 1:2입니다. 물이 흐르는 속도를 x라고 하면

$$9+x=2(9-x),\quad x=3.$$

폭우가 내릴 때 물이 흐르는 속도는 매 시간에 3×2=6(㎞)이고 물을 따라 항행하는 속도는 9+6=15(㎞)이며 물을 거슬러 항행하는 속도는 9−6=3(㎞)입니다. 물을 거슬러 항행하는 속도와 물을 따라 항행하는 속도의 비는 15:3=5:1입니다. 물을 거슬러 항행하는데 걸리는 시간은 $10\times\frac{5}{1+5}=\frac{25}{3}$(시간)이고 두 항구사이의 거리는 $3\times\frac{25}{3}=25$(㎞)입니다.

련습 17−2

1. ㄴ의 속도는 ㄱ의 속도의 $\frac{2}{3}$입니다. 두 사람은 각각 A, B 두곳에서 동시에 출발하였습니다. 만일 마주 향해 걷는다면 1시간만에 서로 만날수 있습니다. 같은 방향으로 걷는다면 ㄱ가 몇시간 걸어야 ㄴ를 따라잡을수 있습니까?

2. 어떤 배는 최고 6시간 항행할수 있는 디젤유를 넣을수 있습니다. 떠날 때는 바람이 불지 않아 매 시간에 30㎞씩 항행하고 돌아올 때는 맞바람이 불어와 매 시간에 항행한 거리가 갈 때의 $\frac{4}{5}$였습니다. 이 배는 최고로 몇㎞ 항행하고 돌아와야 합니까?

3. 한 쾌속정이 A로부터 B까지 왕복하는데 모두 4시간 걸립니다. 갈 때 물을 따라 항행하는것은 돌아올 때 물을 거슬러 항행하는것보다 매 시간에 10㎞ 더 항행합니다. 그러므로 앞의 두 시간은 후의 두시간보다 16㎞ 더 항행합니다. A, B사이의 거리는 몇㎞입니까?

4. 영희가 18원을 가지고 석탄을 사러 갔습니다. 석탄값이 $\frac{1}{4}$

내렸기때문에 이 돈으로 원래보다 100kg 더 샀습니다. 원래 석탄 1kg의 값은 얼마입니까?

5. 자동차가 A곳으로부터 B곳으로 갑니다. 만일 속도가 예정된 것보다 매 시간에 5㎞ 느리다면 도착하는 시간도 $\frac{1}{8}$ 늦어집니다. 만일 속도가 $\frac{1}{3}$ 빠르다면 시간은 1시간 빨리 도착합니다. A, B 사이의 거리는 몇㎞입니까?

6. A, B 두곳사이의 거리는 15㎞입니다. ㄱ가 A지점으로부터 B지점을 향해 3㎞ 갔습니다. 이때 ㄴ도 A지점으로부터 ㄱ가 간 길을 따라 ㄱ를 따라갑니다. ㄴ는 ㄱ를 따라잡은 후 가던 길을 따라 돌아오고 ㄱ는 계속하여 B지점으로 갑니다. ㄴ가 A지점에 돌아왔을 때 ㄱ도 B에 도착했습니다. ㄱ, ㄴ 속도비는 얼마입니까?

7. ㄱ, ㄴ 두 기차의 속도비는 5:4입니다. ㄴ기차는 먼저 떠나 B역에서 A역으로 갑니다. B역으로부터 72㎞ 되는 곳까지 달렸을 때 ㄱ기차는 A역에서 B역으로 갑니다. 두 기차가 서로 만난 곳은 A, B 두 역과 떨어진 거리의 비가 3:4인 곳입니다. A, B 두 역사이의 거리는 몇㎞입니까?

8. 한 자동차가 매 시간에 40㎞의 속도로 ㄱ도시로부터 ㄴ도시로 갑니다. 돌아올 때 자동차는 본래의 속도로 전체 거리의 $\frac{3}{4}$보다 5㎞ 더 달린 후 매 시간에 30㎞의 속도로 나머지 거리를 달렸습니다. 그리하여 ㄱ도시로 돌아오는 시간은 ㄴ도시로 갈 때의 시간보다 10분 더 걸렸습니다. ㄱ, ㄴ 두 도시사이의 거리는 얼마입니까?

9. 창일이는 학교에서 집으로 돌아가는데 10분간 걸리고 정희는 14분간 걸립니다. 정희네 집은 창일이네 집보다 $\frac{1}{6}$ 멀리 있습니다. 창일이는 정희보다 매 분에 12m씩 더 걷습니다. 정희네 집에서 학교까지의 거리는 몇m입니까?

10. ㄱ는 자전거를 타고 ㄴ는 걸어서 A, B 두곳에서 동시에 떠

나 마주 갑니다. 낮 12시에 두 사람은 도중에서 만났습니다. 그후 그들은 쉬지 않고 계속 걸어 12시 10분에 ㄱ는 B에 도착하고 13시 30분에 ㄴ는 A에 도착하였습니다. 만일 ㄱ, ㄴ 두 사람의 속도가 모두 변하지 않는다면 그들이 출발한 시간은 몇시 몇분입니까?

11. ㄱ, ㄴ 두사람은 각각 A, B 두곳에서 동시에 마주 떠나 E곳에서 서로 만난 후 ㄱ는 계속 B곳을 향해 걸었습니다. ㄴ는 14분간 휴식한 후 계속 A곳을 향해 걸었습니다. ㄱ와 ㄴ는 각각 B와 A에 도착한 후 인츰 되돌아왔는데 여전히 E곳에서 서로 만났습니다. ㄱ는 매분에 60m씩 걷고 ㄴ는 매 분간에 80m씩 걷습니다. A, B 두곳사이의 거리는 몇m입니까?

12. ㄱ, ㄴ 두 차는 A, B 두곳에서 동시에 마주 떠났습니다. 떠날 때 ㄴ차의 속도는 ㄱ차의 80%였습니다. 두 차가 만난 후 ㄱ차의 속도는 $\frac{1}{5}$ 작아지고 ㄴ차의 속도는 $\frac{1}{5}$ 커졌습니다. ㄱ차가 B곳에 도착했을 때 ㄴ차는 A곳까지 아직 20㎞ 남아있었습니다. A, B 두곳사이의 거리는 몇㎞입니까?

13. ㄱ, ㄴ, ㄷ 세 차는 일정한 속도로 A곳으로부터 B곳까지 갑니다. ㄴ차는 ㄷ차보다 10분 늦게 출발하였습니다. ㄴ차는 출발해서부터 40분후에 ㄷ차를 따라잡았습니다. ㄱ차는 ㄴ차보다 20분 늦게 출발하였습니다. ㄱ차는 출발해서부터 1시간후에 ㄷ차를 따라잡았습니다. 그러면 ㄱ차는 출발해서부터 몇시간후에 ㄴ차를 따라잡겠습니까?

14. ㄱ, ㄴ 두 차는 공장으로부터 동시에 떠나 A도시로 짐을 실어갑니다. A도시에 도착한 후 인츰 돌아옵니다. 두 차가 돌아오는 속도는 각각 짐을 나를 때 속도의 2배입니다. ㄱ차가 A도시에 도착하였을 때 ㄴ차는 A도시에서 20㎞ 떨어져있었습니다. ㄱ차가 공장에 돌아왔을 때 ㄴ차는 거리의 $\frac{2}{3}$까지 돌아왔습니다. 공장으로부터 A도시까지 몇㎞입니까?

제3절 도형에 관한 비례문제

중 점

1. 도형에 관한 정비례와 반비례의 관계를 잘 알아야 합니다.
2. 도형에 관한 비례를 잘 응용하여 실제적인 문제를 정확하게 풀어야 합니다.

〔례1〕 바른4각형이 4개의 직4각형으로 나뉘였습니다. 그것들의 면적은 각각 $\frac{1}{10}$㎡, $\frac{1}{5}$㎡, $\frac{3}{10}$㎡, $\frac{2}{5}$㎡입니다. 그림에서 빗선을 친 부분은 바른4각형입니다. 그러면 빗선을 친 부분의 면적은 몇㎡입니까? (그림 48)

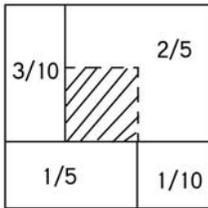



그림 48

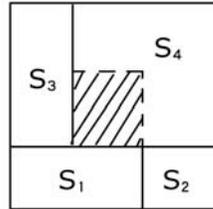



그림 49

〔풀이〕 바른4각형의 면적은 4개의 직4각형의 면적의 합과 같습니다. 즉

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{3}{10}+\frac{2}{5}=1$$

4개의 직4각형을 각각 S_1, S_2, S_3, S_4라고 하고 그 길이를 각각 a, b, c, d라고 합니다. (그림 49)

$$S_1:S_2=\frac{1}{5}:\frac{1}{10}=2:1$$

그러므로 $a:b=2:1$, 그러면 $a=1\times\frac{2}{1+2}=\frac{2}{3}$

마찬가지로 $S_3:S_4=\frac{3}{10}:\frac{2}{5}=3:4$

그러면 $c=1\times\frac{3}{3+4}=\frac{3}{7}$

빗선을 친 바른4각형의 변의 길이는

$$a-c=\frac{2}{3}-\frac{3}{7}=\frac{5}{21}$$

작은 바른4각형의 면적은 $(\frac{5}{21})^2=\frac{25}{441}$(㎡)

답: 빗선을 친 부분의 면적은 $\frac{25}{441}$㎡입니다.

〔**례2**〕 그림 50을 보시오. 4각형이 AC, BD에 의해 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ 네개 3각형으로 나뉘였습니다.

AE＝30㎝, CE＝60㎝, BE＝80㎝, DE=40㎝일 때 ㄷ와 ㄹ 두 3각형의 면적의 합은 ㄱ, ㄴ 두 3각형의 면적의 합의 몇배입니까?

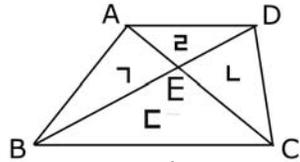



그림 50

〔**풀이**〕그림으로부터 다음과 같은것을 알수 있습니다. ㄴ와 ㄹ 두 3각형의 높이는 같고 밑변의 비는 60:30=2:1입니다. 그러므로 ㄴ와 ㄹ의 면적의 비도 2:1입니다. ㄹ의 면적을 1몫으로 본다면 ㄴ의 면적은 2몫입니다.

3각형 ㄴ와 ㄷ의 높이는 같고 밑변의 비는 80:40=2:1입니다. 그러므로 ㄷ의 면적과 ㄴ의 면적의 비도 2:1입니다. 즉 ㄷ의 면적은 2×2=4(몫)입니다. ㄷ와 ㄱ의 높이는 같고 밑변의 비는 60:30=
=2:1입니다.

그러므로 ㄷ와 ㄱ의 면적의 비도 2:1입니다. 즉 ㄱ의 면적은 4÷2=2(몫)입니다. 그러면 ㄷ와 ㄹ 두 3각형의 면적의 합은 ㄱ와 ㄴ 두 3각형의 면적의 적입니다.

$$(4+1)\div(2+2)=1\frac{1}{4}$$

답: ㄷ와 ㄹ 두 3각형의 면적의 합은 ㄱ, ㄴ 두 3각형의 면적의 합의 $1\frac{1}{4}$배입니다.

〔례3〕 그림 51을 보시오. 3각형 ABC에서 AD는 BC에 수직되고 CE는 AB에 수직이며 AD=8㎝, CE=7㎝, AB+BC=21㎝입니다. 3각형 ABC의 면적은 몇㎠입니까?

〔풀이〕 3각형 ABC의 면적은 일정합니다.

그 면적은 AB×CE÷2로 구할수 있고 또 BC×AD÷2로도 구할수 있습니다. 그 높이의 비는

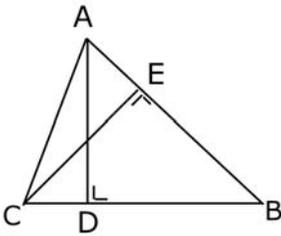



그림 51

CE:AD=7:8

그러므로 AB:BC=8:7입니다.

따라서 BC의 길이는

$$21\times\frac{7}{7+8}=9.8(㎝)$$

3각형 ABC의 면적은

$$9.8\times8\div2=39.2(㎠)$$

답: 3각형 ABC의 면적은 39.2㎠입니다.

〔례4〕 그림 52를 보시오. 3각형에서 BD=2DC, AE=2DE, FC=7입니다. 그러면 AF는 얼마입니까?

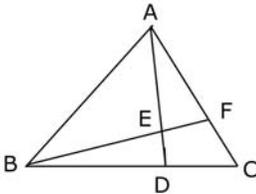



그림 52

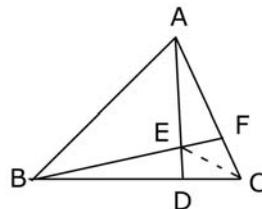



그림 53

〔풀이〕 EC를 련결합니다. 그림 53을 보시오.

3각형 DCE의 면적을 1이라고 하면 3각형 BDE의 면적은 2이고

3각형 ABE의 면적은 4이며 3각형 ABD의 면적은 6이고 3각형 ADC의 면적은 3이며 3각형 AEC의 면적은 2입니다. 3각형 FEC의 면적을 a라고 하면 3각형 AEF의 면적은 $2-a$입니다.

그림에 의하여 다음과 같은것을 얻을수 있습니다.

$\frac{DE}{EF}=\frac{2+1}{a}=\frac{4}{2-a}$, 그러면 a가 $\frac{6}{7}$이라는것을 알수 있습니다.

AF의 길이를 x라고 하면

$$\frac{FC}{AF}=\frac{3+\frac{6}{7}}{4+2-\frac{6}{7}}=\frac{7}{x}$$

그러면 $x=9\frac{1}{3}$을 얻습니다.

답: AF는 $9\frac{1}{3}$입니다.

〔례5〕 점 E, F는 4각형 ABCD의 대각선 BD를 3등분하고 점 F는 GC를 2등분합니다. ㄱ, ㄴ 두 3각형의 면적의 합은 12.9㎠입니다. 4각형 ABCD의 면적은 몇㎠입니까?(그림 54)

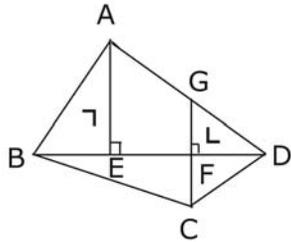
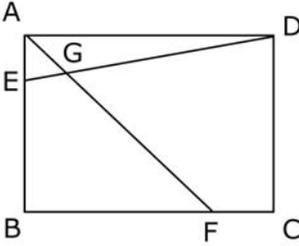



그림 54

〔풀이〕 BD=3BE이므로 3각형 ABD의 면적은 3각형 ABE(ㄱ)의 면적의 3배이고 3각형 BCD의 면적은 3각형 CFD의 면적의 3배입니다. 또한 GF=FC이므로 3각형 CFD의 면적은 3각형 GFD(ㄴ)의 면적과 같습니다. 그러면 3각형 BCD의 면적은 3각형 GFD(ㄴ)의 면적의 3배입니다. 4각형 ABCD의 면적은 3각형 ABD와 3각형 BCD의 면적의 합과 같습니다.

그러므로 4각형 ABCD의 면적은

ㄱ×3+ㄴ×3=(ㄱ+ㄴ)×3=12.9×3=38.7(㎠)

답: 4각형 ABCD의 면적은 38.7㎠입니다.

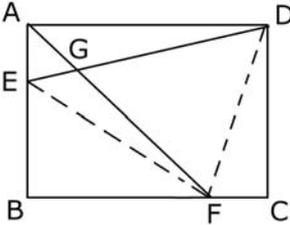



그림 55

〔례6〕 그림 55에서 직4각형 ABCD의 면적은 120㎠이고 BE=3AE, BF=2FC입니다. 4각형 EGFB의 면적을 구하시오.

〔풀이〕 E와 F, D와 F를 련결합니다. (그림 56)

그림 56

BE=3AE, BF=2FC로부터 3각형 AED의 면적은 $60\times\frac{1}{4}=15$(㎠)입니다.

3각형 ABF의 면적 $60\times\frac{2}{3}=40$(㎠),

3각형 AEF의 면적 $60\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=10$(㎠)

를 얻습니다.

3각형 AFD의 면적은 직4각형의 면적의 절반 즉 120÷2=60(㎠)입니다. 3각형 AEF와 3각형 AFD의 면적의 비는 FG와 GD의 비와 같습니다. 즉 10:60=1:6입니다.

그러므로 $\frac{EG}{GD}=\frac{1}{6}$입니다. $\frac{EG}{ED}=\frac{1}{7}$

3각형 AEG의 면적은 3각형 AED의 면적의 $\frac{1}{7}$과 같습니다.

즉 $15\times\frac{1}{7}=\frac{15}{7}$(㎠)

그러므로 EGFB의 면적은 $40-\frac{15}{7}=37\frac{6}{7}$(㎠)입니다.

답: 4각형 EGFB의 면적은 $37\frac{6}{7}$㎠입니다.

〔례7〕 그림 57에서 바른4각형 ABCD의 면적은 120㎠입니다. E는 AB의 중간점이고 F는 BC의 중간점입니다. 4각형 BGHF의 면

적은 몇㎠입니까?

〔풀이〕 문제의 주어진 조건에 의하여 BE=BF=FC라는것을 알수 있습니다. 그러므로 $S_{\triangle BEC}$, $S_{\triangle BDF}$, $S_{\triangle FDC}$는 모두 120÷4=30(㎠)를 얻을수 있습니다.

그림 57

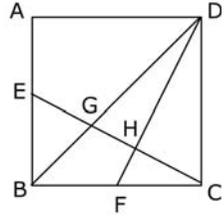
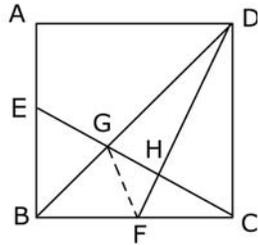
GF를 련결합니다. (그림 58)

BF=FC로부터 $S_{\triangle BFG}=S_{\triangle FGC}=S_{\triangle BGE}$를 얻을수 있습니다.

그러므로 $S_{\triangle BFG}=\frac{1}{3}S_{\triangle BEC}=\frac{1}{3}\times 30=10$(㎠)입니다. 그러면 $S_{\triangle GDF}=30-10=20$(㎠)입니다.

그림 58

$S_{\triangle GDF}:S_{\triangle FDC}=20:30=2:3$입니다. 그러면 $S_{\triangle GHF}:S_{\triangle FHC}=2:3$을 알수 있습니다.

$S_{\triangle GHF}=S_{\triangle FGC}\times\frac{2}{2+3}=4$(㎠)입니다. 4각형 BGHF의 면적은 10+4=14(㎠)입니다.

련습 17-3

1. ABCD는 면적이 24㎠인 제형입니다. DC=3AB이고 E는 AD의 가운데점입니다.

3각형 CDE의 면적은 몇㎠입니까? (그림 59)

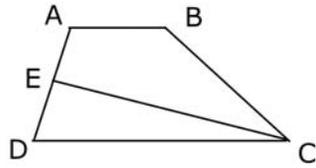



그림 59

2. 제형의 웃변과 밑변의 비는 2:3이고 ㄱ, ㄴ의 면적은 각각 8㎠와 6㎠입니다. 빗선을 친 부분의 면적은 얼마입니까? (그림 60)

3. 3각형 ABC는 3각형 BEF와 4각형 AEFC 두 부분으로 나뉘였습니다. 3각형 BEF와 4각형 AEFC의 면적의 비는 얼마입니까? (그림 61)

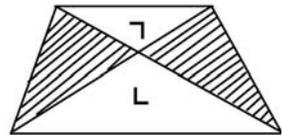



그림 60

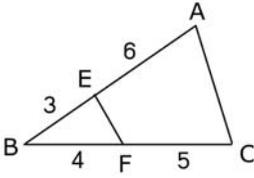



그림 61

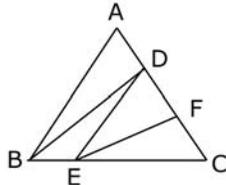



그림 62

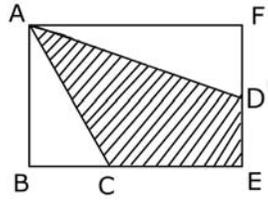



그림 63

4. 다음 3각형 ABC의 매 변의 길이는 다 96㎝입니다. 3각형을 면적이 같은 4개의 3각형으로 나누었습니다. 그러면 CE와 CF의 길이의 합은 얼마입니까? (그림 62)

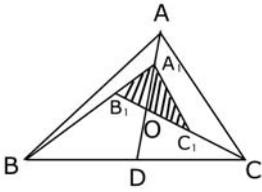



그림 64

5. 그림 63에서 직4각형의 길이와 너비의 비는 3:2이고 3각형 ABC의 면적은 6㎠입니다. 점 C는 BE를 1:2로 나누고 D는 EF의 가운데점입니다. 빗선을 친 부분의 면적은 얼마입니까?

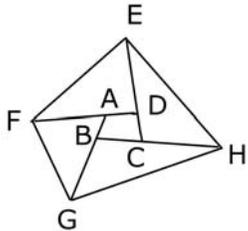
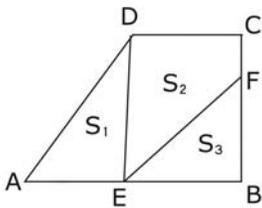



그림 65

6. 그림 64에서 BD=DC, $AA_1=\frac{1}{4}AD$, $A_1B_1=\frac{1}{3}A_1B$, $B_1C_1=\frac{1}{2}B_1C$입니다. 3각형

ABC의 면적이 1이라면 3각형 $A_1B_1C_1$의 면적은 얼마입니까?

7. 그림 65에서 4각형 ABCD의 각 변을 모두 2배로 연장하여 하나의 새로운 4각형 EFGH를 얻었습니다. 만일 ABCD의 면적이 5㎠이면 EFGH의 면적은 몇㎠입니까?

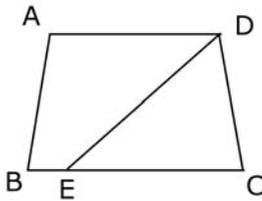



그림 66

그림 67

8. 그림 66에서 4각형 ABCD는 직각제형입니다.

웃변 CD=3이고 밑변 AB=9입니다. 선분 DE, EF는 제형을 면적이 같은 세 부분으로 나누었습니다. 즉 $S_1=S_2=S_3$입니다.

CF＝2입니다. 그러면 이 직각제형 ABCD의 면적은 얼마입니까?

9. 그림 67에서 제형 ABED와 3각형 DEC의 면적의 비는 6:7이고 AD＝10㎝, BC＝16㎝입니다.

BE와 EC의 길이는 각각 얼마입니까?

그림 68

10. 그림 68에서 4각형 ABCD는 제형이고 E는 AD의 가운데점입니다. 직선 CE는 제형을 ㄱ, ㄴ 두 부분으로 나누었습니다. 그것들의 면적의 비는 10:7입니다. 밑변 CD와 웃변 AB의 길이의 비는 얼마입니까?

그림 69

11. 그림 69에서 AF:FC＝1:2이고 BE:EC＝2:3입니다.

만일 3각형 ABC의 면적이 9㎠라면 3각형 GBE의 면적은 몇㎠입니까?

12. 그림 70에서 큰 직4각형은 각각 면적 12㎠, 24㎠, 36㎠, 48㎠인 4개의 작은 4각형으로 되여있습니다. 그림에서 빗선을 친 부분의 면적은 얼마입니까?

그림 70

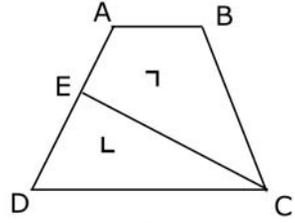
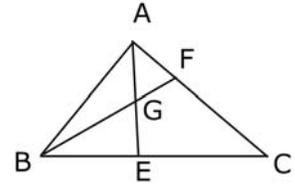
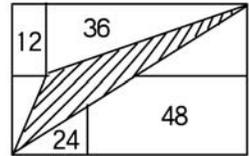
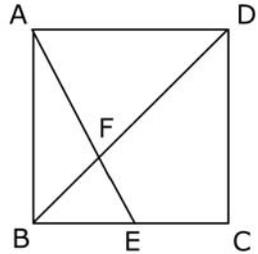
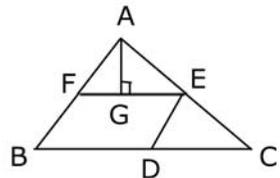
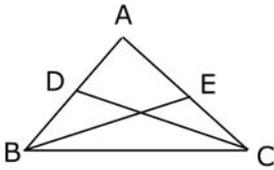
13. 그림 71을 보시오. 바른4각형 ABCD에서 E는 BC의 가운데점이고 AE와 BD는 점 F에서 사귑니다. 3각형 ABF의 면적은 1㎠입니다. 바른4각형 ABCD의 면적은 몇㎠입니까?

그림 71

14. 그림 72에서 3각형 ABC안에 평행4변형 BDEF가 있습니다. BD＝15㎝, CD＝＝10㎝, AG＝8㎝입니다.

평행4변형 BDEF의 면적은 얼마입니까?

그림 72

15. 그림 73에서 AD＝DB, AE＝2EC이며 3각형 ADC의 면적은 3각형 BEC의 면

적보다 5㎠ 큽니다.

3각형 ABC의 면적은 얼마입니까?

그림 73

16. 그림 74에서 M과 N은 면적이 1인 바른4각형 ABCD의 변 AB와 BC의 가운데점입니다. 빗선을 친 부분의 면적을 구하시오.

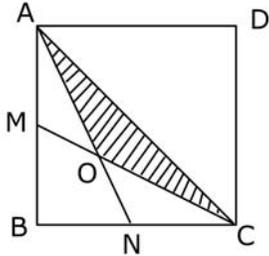



그림 74

17. 그림 75에서 직4각형 ABCD의 면적은 60㎠이고 E는 BC의 가운데점이며 CF=FG=DG, $AH=\frac{1}{4}AE$입니다. 빗선을 친 부분의 면적은 얼마입니까?

18. 그림 76에서 3각형 BEO의 면적은 5㎠이고 3각형 ABO의 면적은 8㎠입니다. 4각형 ABCD의 면적은 얼마입니까?

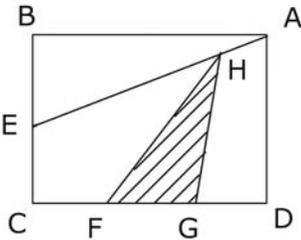



그림 75

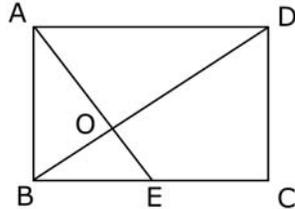



그림 76

제18장 원둘레의 길이와 면적

제1절 원둘레의 길이

중 점

1. 원둘레의 길이, 부채형의 둘레의 길이를 정확히 구할줄 알아야 합니다.
2. 문제의 본질을 틀어쥐고 구하려는것과 배운 지식사이의 련계를 잘 세워 풀이를 구해야 합니다.

그림 77

〔례1〕 AB＝120m, BC＝70m(그림 77)입니다. A로부터 C까지 세가지 서로 다른 반원호가 있습니다.

어느 반원호의 둘레의 길이가 제일 짧겠습니까?

〔풀이〕 3개의 반원호의 둘레의 길이를 각각 계산하고 비교합니다.

길①: $(120+70)\pi\div2=95\pi(m)$

길②: $(120+70)\pi\div2=95\pi(m)$

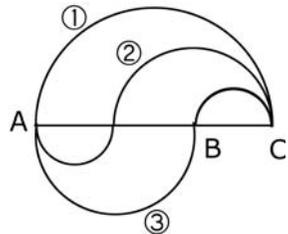
길③: $120\div2+70\pi\div2=95\pi(m)$

그러므로 세개의 둘레의 길이가 같습니다.

〔례2〕 어느 한 반원둘레의 길이는 20.56㎝입니다.

그 직경은 몇㎝입니까?

〔풀이〕 이 문제는 방정식을 세우고 풀수 있습니다.

반원둘레의 길이를 x㎝라고 하면

$$3.14\times x\times\frac{1}{2}+x=20.56$$

$$1.57x+x=20.56$$

$$2.57x=20.56$$

$$x=8$$

답: 직경은 8㎝입니다.

〔례3〕 그림 78에서 빗선을 친 부분의 둘레의 길이는 몇㎝입니까? (π는 3.14를 취합니다.)

〔풀이〕 먼저 빗선을 친 부분의 둘레의 길이를 분석해보면 다음과 같은것을 알수 있습니다.

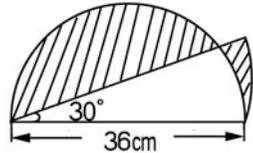



그림 78

① 직경이 36㎝인 원의 둘레의 길이의 절반

② 반경이 36㎝이고 각이 30°인 중심각과 마주한 원호의 길이

$$36\times3.14\div2=56.52(㎝)$$

$$36\times3.14\times2\times\frac{30}{360}=18.84(㎝)$$

$$56.52+18.84+36=111.36(㎝)$$

답: 빗선을 친 부분의 둘레의 길이는 111.36㎝입니다.

〔례4〕 그림 79에는 똑같은 원이 6개 있습니다.

그가운데서 A, B, C, D, E는 어느 한 곳에 고정되여있고 여섯번째 원 F는 A, B, C, D, E가 고정된 원에 붙어서 시계바늘이 도는 방향으로 천천히 굴러갑니다. 굴러가는 과정에는 아무런 미끄럼현상도 나타나지 않습니다. 원 F가 다시 굴러서 출발점 P까지 돌아올 때 그자체는 중심을 에워싸고 몇바퀴 회전합니까?

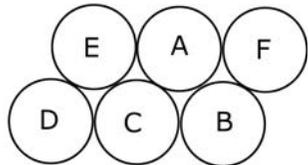



그림 79

〔풀이〕 여기서 기본은 원 F가 원 B, C, D, E, A의 둘레를 각각 몇바퀴 도는가를 구하는것입니다.

그림 80을 보시오.

원 F가 원 B, C, D, E, A의 둘레를 각각 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$바퀴 돌아갑니다. 모든 원의 반경이 같기때문에 모두 $(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3})\times2=3\frac{2}{3}$(바퀴) 돌아갑니다.

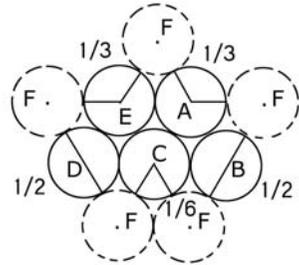



그림 80

〔례5〕 지구의 적도는 원형에 가깝습니다. 적도의 반경은 약 6371㎞입니다. 노끈 하나를 지구적도에 붙여서 한바퀴 감는다고 합시다. 이제 노끈의 길이를 6.28m 더 늘이여 노끈과 지면사이에 일정한 틈이 있게 합니다. 이 틈은 얼마나 넓겠습니까? 길이가 4㎝인 달팽이가 이 틈을 지나갈수 있습니까?

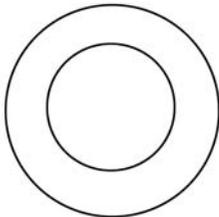



그림 81

〔풀이〕 적도와 노끈이 둘러싼 원을 크기가 서로 다른 두 원으로 봅니다. 이 두 원은 한개 고리를 형성합니다. 아낙원의 반경은 6371㎞이고 바깥원의 둘레의 길이는 아낙원의 둘레의 길이보다 6.28m 큽니다. 고리의 너비를 구하면 됩니다.(그림 81)

아낙원의 반경을 r, 고리너비를 x라고 하면 문제의 조건에 의하여

$$2\pi\times(x+r)-2\pi r=6.28$$
$$2\pi x+2\pi r-2\pi r=6.28$$
$$2\pi x=6.28$$
$$x=1$$

계산과정이 간단명료하고 계산이 간결합니다. 계산결과를 보면 그렇게 큰 고리가 즉 바깥원의 둘레의 길이가 아낙원의 둘레의 길이보다 6.28m 크지만 고리너비는 1m나 됩니다. 따라서 노끈이 지면보다 1m 높으므로 달팽이는 말할것없이 사람이라도 허리를 굽

히고 지나갈수 있습니다.

〔례6〕 직선우에 직4각형 1을 놓았습니다. 길이와 너비, 대각선의 길이는 각각 4㎝, 3㎝, 5㎝입니다.

이 직4각형을 A를 고정시키고 시계바늘이 도는 방향으로 90° 회전시키면 2의 위치에 갑니다.

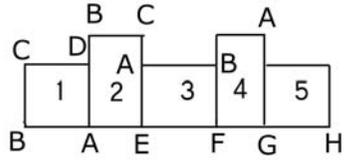



그림 82

다시 직4각형 2를 정점 E를 중심으로 시계바늘이 도는 방향으로 90° 회전시키면 직4각형 3의 위치로 갑니다.

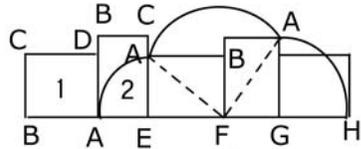



그림 83

이때 C점이 F점의 위치로 갑니다. 다시 직4각형 3을 정점 F를 중심으로 시계바늘이 도는 방향으로 90° 회전시키면 직4각형 4의 위치로 갑니다. 이때 B점은 G점의 위치로 갑니다.

다시 직4각형 4를 정점 G를 중심으로 시계바늘이 도는 방향으로 90° 회전시키면 직4각형 5의 위치로 갑니다. 이때 직4각형 1의 A점이 H점의 위치로 갑니다. A점이 지나간 거리를 구하시오. (그림 82)

〔풀이〕 그림 83으로부터 다음과 같은 풀이식을 구할수 있습니다.

$$2\times3.14\times3\times\frac{1}{4}=4.71(㎝)$$

$$2\times3.14\times5\times\frac{1}{4}=7.85(㎝)$$

$$2\times3.14\times4\times\frac{1}{4}=6.28(㎝)$$

$$4.71+7.85+6.28=18.84(㎝)$$

답: A점이 지나간 거리는 18.84㎝입니다.

〔례7〕 길이가 같은 두 철근이 있습니다. 하나는 바른4각형을 만들고 다른 하나는 원을 만들었습니다. (두 이음자리는 계산하

지 않습니다.) 결과 바른4각형의 변의 길이는 원의 반경보다 $3(\pi-2)$m 길었습니다. 두 철근의 길이는 모두 몇m입니까?

〔풀이〕 길이가 같은 두 철근으로 바른4각형과 원을 만들었으므로 그것들의 둘레의 길이는 같습니다.

원의 반경을 xm라고 하면 바른4각형의 변의 길이는

$3(\pi-2)+x$m입니다.

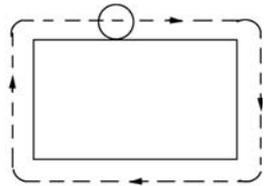
$$2\pi\times x=[x+3(\pi-2)]\times4$$
$$\pi x=2x+6(\pi-2)$$
$$\pi x-2x=6(\pi-2)$$
$$(\pi-2)x=6(\pi-2)$$
$$x=6$$

두 철근의 총길이: $2\pi x\times2=2\pi\times6\times2=24\pi=75.36$(m)

답: 두 철근의 길이는 모두 75.36m입니다.

〔례8〕 그림 84에서 반경이 1㎝인 쇠돈이 직4각형의 변을 따라 굴러갑니다. 직4각형의 길이는 30㎝이고 너비는 20㎝입니다. 쇠돈이 원래의 위치까지 굴러왔을 때 쇠돈의 중심이 지나간 거리는 몇㎝입니까?

그림 84

〔풀이〕 쇠돈이 굴러간 길이의 총합은 직4각형의 둘레의 길이와 같고 4개의 끝점을 돌아갈 때의 거리는 반경이 1㎝인 원의 둘레의 길이와 같습니다.

$$(30+20)\times2=100(\text{㎝})$$
$$3.14\times1\times2=6.28(\text{㎝})$$
$$100+6.28=106.28(\text{㎝})$$

답: 쇠돈이 지나간 거리는 106.28㎝입니다.

련습 18－1

1. 그림 85에서 원의 면적과 직4각형의 면적은 같습니다. 원의 둘레의 길이는 12.56㎝입니다. 빗선을 친 부분의 둘레의 길

이는 얼마입니까?

2. 그림 86에서 직각제형의 면적은 60㎠이고 아래우밑변의 합은 20㎝이며 두 옆변의 비는 3∶5입니다. 반경이 같은 세개 부채형을 파낸 빗선을 친 부분의 둘레의 길이는 몇㎝입니까?

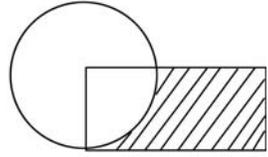



그림 85

그림 86

3. 그림 87에서 개 한마리가 건축물의 벽 한귀퉁이에 매여있습니다. 이 건축물은 변의 길이가 600㎝인 바른4각형입니다. 개를 맨 끈의 길이는 20m입니다. 지금 개가 A점으로부터 출발하여 끈을 팽팽히 당기면서 시계바늘이 도는 방향으로 뛰여갑니다. 몇m 뛰여갈수 있습니까?

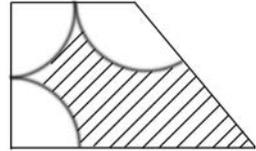



그림 87

4. 바른3각형의 변의 길이는 3㎝입니다. 3각형 ABC가 한 직선을 따라 30번 굴러갔습니다.

그림 88에서 A점이 지나간 거리의 길이를 구하시오.

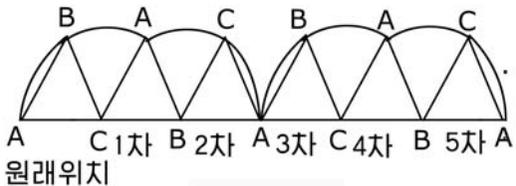



그림 88

5. 반경이 1㎝인 쇠돈이 3각형의 변두리를 따라 굴러갑니다. 3각형의 세변의 길이는 각각 6㎝, 7㎝, 8㎝입니다. 쇠돈이 원래위치까지 굴러왔을 때 쇠돈의 중심이 통과한 거리는 얼마입니까?

6. 사람을 태운 우주비행선은 지구주위를 모두 14바퀴 돌았습니다. 그가운데서 후의 10바퀴는 땅겉면에서 343㎞ 떨어진 원형궤도에서 비행하였습니다. 비행선은 원형궤도를 따라 몇㎞ 비행하였습니까? (지구의 반경은 6371㎞이고 원주률은 3.14를 취합니다.)

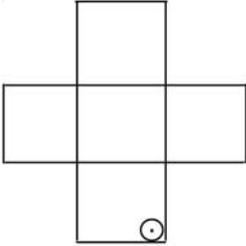



그림 89

7. 그림 89에서 매개 변은 10㎝이며 십자모양으로 되여있습니다. 반경이 1㎝인 한 원이 십자형의 아낙을 따라 한바퀴 굴러서 출발점으로 돌아옵니다. 그러면 원의 중심이 통과한 길이는 몇㎝입니까?(답은 소수점아래 둘째 자리까지 계산하시오.)

8. 원의 반경이 매번 1㎝ 늘어날 때마다 둘레의 길이는 몇㎝ 늘어나겠습니까?

제2절 원의 면적

중 점

1. 공식에 의하여 원의 면적과 부채형의 면적을 구할줄 알아야 합니다.

2. 도형을 평행이동, 회전이동하며 베고 붙이는 방법으로 빗선을 친 부분의 면적을 구해야 합니다.

〔례1〕 그림 90에서 큰 바른4각형의 변의 길이는 10㎝이고 작은 바른4각형의 변의 길이는 6㎝입니다. 빗선을 친 부분의 면적은 몇㎠입니까?

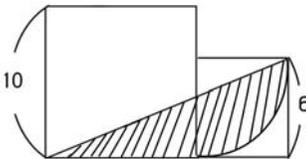



그림 90

〔풀이〕 $3.14\times6^2\times\frac{1}{4}-6\times6\div2=$

$=28.26-18=10.26$

$10\times6\div2=30$(㎠)

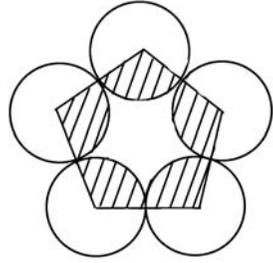
$10.26+30=40.26$(㎠)

답: 빗선을 친 부분의 면적은 40.26㎠입니다.

〔례2〕 그림 91에서 똑같은 원의 중심을 련결한 선은 변의 길이가 10㎝인 바른5각형을 형성하였습니다. 바른5각형안의 빗선

을 친 부분의 면적을 구하시오. (π는 3.14를 취합니다.)

그림 91

〔풀이〕 바른5각형의 아낙각의 합은 $180° \times (5-2) = 540°$이므로 매 아낙각은 $540 \div 5 = 108°$입니다. 빗선을 친 부분은 반경이 5㎝이고 중심각이 108°인 부채형 5개로 되여있습니다. 먼저 1개의 부채형의 면적을 구하고 거기에 5를 곱하면 빗선을 친 부분의 면적이 됩니다.

$$3.14 \times 5^2 \times \frac{108}{360} = 78.5 \times \frac{3}{10} = 23.55(㎠)$$

$$23.55 \times 5 = 117.75(㎠)$$

답: 빗선친 부분의 면적은 117.75㎠입니다.

〔례3〕 그림 92에서 OA, OB는 각각 작은 반원의 직경입니다. OA=OB=6㎝, ∠BOA=90°입니다. 빗선을 친 부분의 면적은 몇㎠입니까?

〔풀이〕 빗선을 친 부분은 모두 불규칙도형입니다.

그러나 빗선을 친 부분을 합리적으로 베서 붙여놓는다면 빗선친 부분이 2등변3각형으로 될수 있습니다. (그림 93)

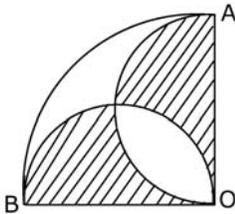



그림 92

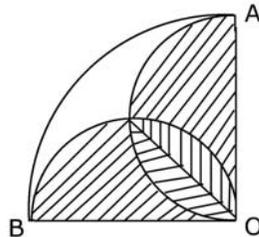



그림 93

그러면 빗선친 부분의 면적은

$$6 \times 6 \div 2 = 18(㎠)$$

답: 빗선친 부분의 면적은 18㎠입니다.

〔례4〕 그림 94에서 $\frac{1}{4}$원인 부채형 AOB와 A′O′B′는 겹쳤습니다. POQO′는 면적이 5㎠인 바른4각형입니다. 겹친 도형에서 빗선친 부분의 면적은 몇㎠입니까? (π는 3.14를 취합니다.)

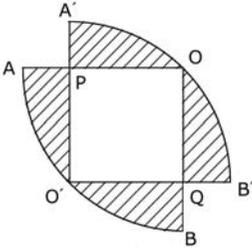



그림 94

그림에서 빗선친 부분은 대칭성을 가지고 있습니다.

빗선을 친 부분의 절반을 구하고 2를 곱하면 빗선친 부분의 면적을 구할수 있습니다.

그림에서 OO′는 바른4각형의 대각선인 동시에 부채형의 반경입니다. 바른4각형의 면적은 대각선의 2제곱을 2로 나눈것과 같습니다.

즉 $r\times r\div 2=5$

$r^2=10(㎠)$

$\frac{1}{4}$원의 면적은 $3.14\times 10\div 4=31.4\div 4=7.85(㎠)$

빗선친 부분의 면적은 $(7.85-5)\times 2=2.85\times 2=5.7(㎠)$

답: 빗선친 부분의 면적은 5.7㎠입니다.

〔례5〕 그림 95에서 4각형 ABCD는 평행4변형이고 AD=8㎝, AB=10㎝, ∠DAB=30°, 높이 CH=4㎝입니다. 활등 BE, DF는 각각 AB, CD를 반경으로 하고 활등 DM, BN은 각각 AD, CB를 반경으로 합니다. 빗선친 부분의 면적은 몇㎠입니까? (π는 3.14를 취하고 답은 0.01까지 정확하게 하시오.)

〔풀이〕 4각형 ABCD는 평행4변형이고 AD=8㎝, AB=10㎝, ∠DAB=30° 이므로

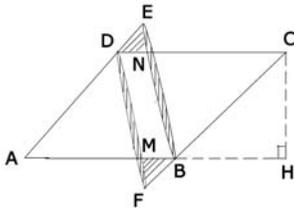



그림 95

$S_{부채형EAB}=S_{부채형FCD}=10^2\times\pi\times\frac{30}{360}=$

$=\frac{25}{3}\pi(㎠)$

$S_{부채형DAM}=S_{부채형BCN}=8^2\times\pi\times\frac{30}{360}=$

$$=\frac{16}{3}\pi(㎠)$$

평행4변형 ABCD의 높이 CH=4㎝이므로

$$S_{\square ABCD}=10\times4=40(㎠)$$

그림으로부터 다음과 같은것을 알수 있습니다. 부채형 EAB와 부채형 FCD의 면적의 합에서 평행4변형 ABCD의 면적을 덜면 4각형 DFBE의 면적과 같습니다. 평행4변형 ABCD의 면적에서 부채형 DAM과 부채형 BCN의 면적을 덜면 4각형 DMBN의 면적과 같습니다.

빗선을 친 부분의 면적 $=S_{4각형DFBE}-S_{4각형DMBN}=$

$$=(2S_{부채형EAB}-S_{\square ABCD})-(S_{\square ABCD}-2S_{부채형DAM})=$$

$$=2(S_{부채형EAB}+S_{부채형DAM}-S_{\square ABCD})$$

식을 쓰면

$$2\times(\frac{25}{3}\pi+\frac{16}{3}\pi-40)=$$

$$=2(\frac{41}{3}\times3.14-40)=$$

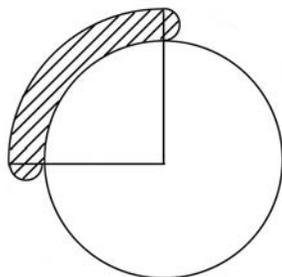
$$\approx5.83(㎠)$$

답: 빗선을 친 부분의 면적은 5.83㎠입니다.

〔례6〕 반경이 1㎝인 원판이 반경이 4㎝인 원판의 왼쪽을 따라 미끌지 않고 굴러갑니다. 작은 원판의 중심은 큰 원판의 중심주위로 90° 돌았습니다.(그림 96)

이때 작은 원판이 돌아간 면적은 몇㎠입니까?

그림 96

〔풀이〕 빗선친 부분의 면적은 한개 부채형고리와 한개의 작은 원으로 나눌수 있습니다. 작은 원의 반경은 1㎝입니다. 부채형고리의 중심각은 90° 이고 고리너비는 2㎝이며 아낙반경은 4㎝이고 바깥반경은 6㎝입니다.

$$[\pi\times(2+4)^2-\pi\times4^2]\times\frac{1}{4}=$$

$$=(36\pi-16\pi)\times\frac{1}{4}$$

$$=20\pi\times\frac{1}{4}=$$

$$=5\pi(㎠)$$

$$5\pi+1^2\times\pi=$$

$$=5\pi+\pi=6\pi=18.84(㎠)$$

답: 면적은 18.84㎠입니다.

〔례7〕 그림 97을 보면 양이 길이가 7m인 끈으로 바른5각형건축물의 한 꼭두점에 매여져있습니다. 건축물의 변의 길이는 3m이고 주위는 모두 풀밭입니다. 이 양이 풀을 먹을수 있는 면적은 몇㎡입니까?($\pi\approx3$)

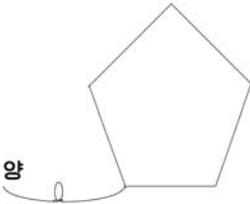
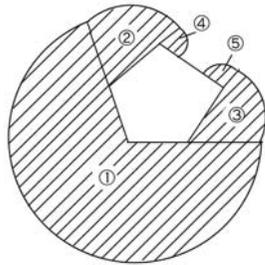



그림 97　　　　　　　그림 98

〔풀이〕 먼저 양의 끈을 팽팽하게 당기면 도달할수 있는 구역은 그림 98과 같습니다.

풀을 먹을수 있는 구역을 5개 부분으로 나눕니다. 바른5각형의 모든 아낙각은 108°이므로 부채형 ①의 중심각은 252°이고 반경은 7m이며 부채형 ②와 ③의 중심각은 모두 72°이고 반경은 4m이며 부채형 ④와 ⑤의 중심각은 모두 72°이고 반경은 1m입니다.

빗선친 부분의 면적은

$$7^2\times\pi\times\frac{252}{360}+4^2\times\pi\times\frac{72}{360}\times2\times1^2+1^2\times\pi\times\frac{72}{360}\times2=$$

$=49\pi \times 0.7+16\pi \times 0.4+\pi \times 0.4=$
$=102.9+19.2+1.2=$
$=123.3(m^2)$

답: 면적은 $123.3m^2$입니다.

〔례8〕 다음 그림 99는 하나의 중심을 가진 세개의 원입니다. 원의 중심은 P이고 PQ=QR=RS입니다. S_1는 중간원과 바깥원사이의 고리면적이고 S_2은 중간원과 작은 원사이의 고리면적입니다. 그러면 $\frac{S_2}{S_1}$은 얼마입니까?

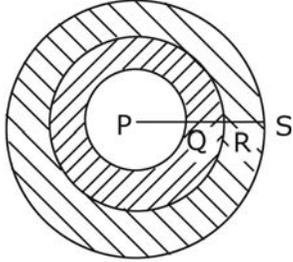



그림 99

〔풀이〕 PQ=1이라고 하면

$$S_1=3^2\times\pi-2^2\times\pi=5\pi$$
$$S_2=2^2\times\pi-1^2\times\pi=3\pi$$
$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{3\pi}{5\pi}=\frac{3}{5}$$

여기서 PQ=1은 가설인데 2, 3… 등으로도 할수 있습니다.

련습 18-2

1. 어느 한 반원형구역의 둘레의 길이는 그의 면적과 같습니다. 이 반원의 반경은 얼마입니까?
(답은 0.01까지 정확하게 구하시오.)

2. 반경이 7인 세개의 활등으로 그림 100에 표시된것과 같은 구역을 만들었습니다. 그가운데서 $\overset{\frown}{AB}$와 $\overset{\frown}{AD}$는 4분 1의 원과 같습니다. $\overset{\frown}{BCD}$는 하나의 반원입니다. 이 구역의 면적은 얼마입니까?

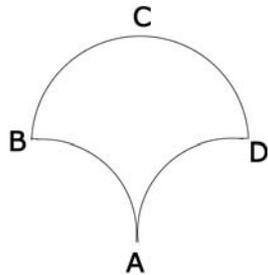



그림 100

3. 그림 101에서 크고작은 두 반원의 직경은 같은 직선우에 있고 호 $\overset{\frown}{AB}$는 작은 반원에 접한 동시에 직경과 평행이며

그림 101

AB=12㎝입니다. 빗선친 부분의 면적은 몇㎠입니까?(π=3.14)

4. 그림 102에서 큰 원의 반경은 6입니다. 빗선친 부분의 면적은 얼마입니까?

그림 102

5. 같은 중심을 가진 세개의 원의 반경의 비는 3:4:5입니다. 큰 원의 면적은 100㎠입니다. 가운데원과 작은 원으로 구성된 고리의 면적은 몇㎠입니까?

6. 바른4각형 ABCD의 변의 길이는 10㎝입니다. 이 바른4각형의 네개 꼭두점을 지나는 하나의 큰 원을 그리고 각 변의 가운데점을 지나는 작은 원을 하나 그렸습니다. 그리고 바른4각형의 맞은변의 가운데점을 직선으로 련결하여 그림 103을 얻었습니다. 빗선친 부분의 면적은 얼마입니까?

그림 103

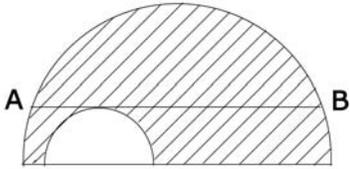
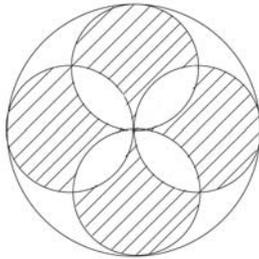
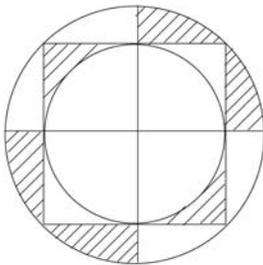
7. 그림 104에서 원의 직경은 8㎝입니다. 빗선친 부분의 면적은 몇㎠입니까?

8. 그림 105에서 직각3각형 ABC의 AB=3㎝, AC=4㎝입니다. 3각형의 꼭두점을 중심으로 하여 원을 그렸는데 반경은 1㎝입니다. 빗선친 부분의 면적은 얼마입니까?

그림 104

9. 그림 106은 시계입니다. 시침과 분침의 길이는 각각 30㎝와 40㎝입니다. 시침이 1시간 갈 때 시침과 분침이 지나간 평면의 면적 차를 구하시오.

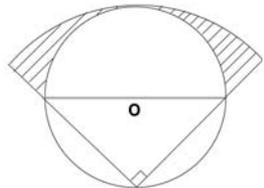
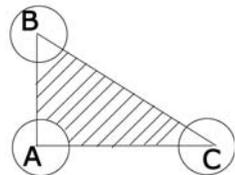
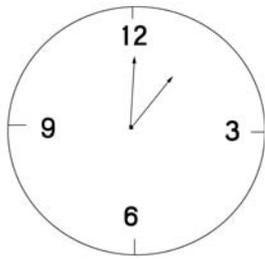
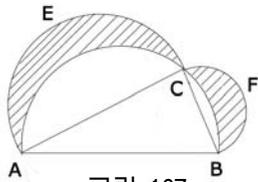
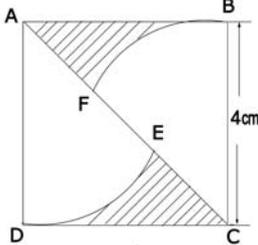
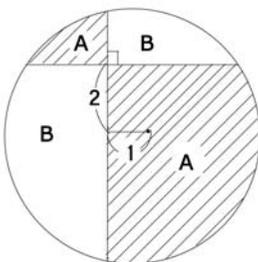
10. AB를 직경으로 하는 반원에서 점 C를 취하였습니다. AC와 BC를 직경으로 하여 △ABC밖에 각각 반원 AEC와 BFC를 그렸

그림 105

그림 106

그림 107

그림 108

그림 109

습니다. C점이 어느 위치에 있을 때 그림에서의 두 쪼각(빗선친 부분) AEC와 BFC의 면적의 합이 제일 크겠습니까?(제시: △ACB는 직각3각형입니다.) (그림 107)

11. 바른4각형 ABCD의 A점과 C점을 각각 원의 중심으로 하고 변의 길이를 반경으로 하여 부채형을 만들었습니다. $\overset{\frown}{BF}$와 $\overset{\frown}{DE}$의 한 끝점 F와 E는 대각선 AC우에 있습니다. 빗선친 부분의 면적을 구하시오. (그림 108)

12. 반경이 4㎝인 원에 서로 수직인 두 선분이 있습니다. 빗선친 부분의 면적 A와 빗선치지 않은 부분의 면적 B의 차는 얼마입니까? (그림 109)

13. 두개의 원이 있습니다. 중심은 같습니다. 큰 원안의 길이가 15㎝인 직선이 작은 원과 접했습니다. 작은 원의 반경은 16㎝입니다. 고리의 면적을 구하시오. (그림 110)

14. 직각변의 길이가 1인 2등변3각형이 있습니다. 3각형을 점 C를 중심으로 시계바늘이 도는 방향으로 90° 돌렸을 때 빗변 AB가 그리는 도형의 면적은 얼마입니까? (그림 111)

15. 영수에게는 2개의 짐덕대가 있습니다. (그림 112) 그것들의 체적은 같습니다. 모두 길이가 4m, 너비가 3m, 높이가 1.5m입니다. 새로 들여온 가소물관 얼마를 A, B, C 세가지 형, 규격 및 수량으로 분류하였는데 다음표와 같습니다.

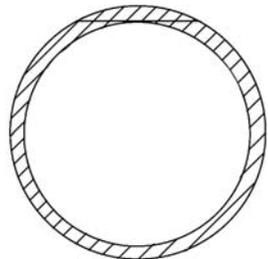



그림 110

형	A	B	C
직 경	35㎝	10㎝	5㎝
수 량	200대	520대	2250대
길 이	4m	4m	3. 5m

영수는 이렇게 많은 관을 두개의 짐덕대에 다 놓을수 없다고 생각합니다. 학생의 생각은 어떻습니까? 학생도 다 놓을수 없다고 여기면 그 리유를 말하시오. 놓을수 있다고 생각하면 방도를 한가지 말하시오. (가소물관의 두께는 계산하지 않습니다.)

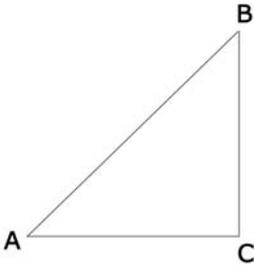



그림 111

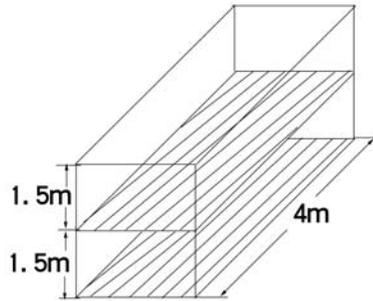



그림 112

제19장 퍼센트응용문제

제1절 일반류형

중 점

1. 한 수가 다른 수의 몇%인가를 구하는 응용문제의 풀이과정은 다음과 같습니다. 물음으로부터 시작하여 단위 1을 찾고 무엇과 단위 1을 비교하겠는가를 확정할 때는 무엇을 단위 1로 나눕니다.

2. 서로 다른 류형의 퍼센트응용문제를 연구하는 과정을 통하여 그에 대한 확고한 리해를 가지고 퍼센트응용문제를 푸는 규칙을 잘 알아야 합니다.

〔례1〕 어떤 상품값을 1000원 내린 후의 판매값은 4000원입니다. 가격을 몇% 낮추었습니까?

〔풀이〕 가격이 몇% 내렸는가를 구하는것은 낮춘 가격이 원가의 몇%인가를 구하는것입니다. 원가를 단위 1로 하고 낮춘 가격과 원가를 비교합니다.

그 관계식은 낮춘 가격÷원가입니다.

$$1000 \div (1000+4000) =$$
$$= 1000 \div 5000 =$$
$$= 20\%$$

답: 가격을 20% 낮추었습니다.

〔례2〕 ㄱ, ㄴ, ㄷ 세사람이 있습니다. ㄱ의 나이는 ㄴ의 나이보다 20% 많고 ㄴ의 나이도 ㄷ의 나이보다 20% 많습니다. ㄱ의 나

이는 ㄷ의 나이보다 몇% 많습니까?

〔풀이〕 문제의 조건에 의하여 ㄱ의 나이는 ㄴ의 나이보다 20% 많습니다.

그러면 ㄱ의 나이는 ㄴ의 120%(1+20%)입니다. 마찬가지로 ㄴ의 나이는 ㄷ의 나이의 120%입니다.

그러면 ㄱ의 나이는 ㄷ의 나이의 120%(ㄴ에 해당함.)의 120%입니다.

즉 $(1+20\%)\times(1+20\%)=144\%$

$$144\%-1=44\%$$

답: ㄱ의 나이는 ㄷ의 나이보다 44% 많습니다.

〔례3〕 ㄱ수는 ㄴ수보다 25% 큽니다. ㄴ수는 ㄱ수보다 몇% 작습니까?

〔풀이〕 문제의 조건에 의하여 ㄱ수는 ㄴ수보다 25% 큽니다.

이것은 다음과 같이 생각할수 있습니다. ㄱ수는 ㄴ수의 $\frac{5}{4}$입니다.

$$1+25\%=125\%=\frac{5}{4}$$

그러면 ㄱ수는 5몫으로 볼 때 ㄴ수는 4몫으로 볼수 있습니다.

$$(5-4)\div5\times100\%=20\%$$

답: ㄴ수는 ㄱ수보다 20% 작습니다.

〔례4〕 석탄 두무지가 있는데 모두 136t입니다. 어느 한 공장에서는 ㄱ무지에서 30% 가져가고 ㄴ무지에서 $\frac{1}{4}$을 가져갔습니다.

이때 ㄴ무지에 남은 석탄이 모두의 62.5%보다 13t 적었습니다.

이 공장에서는 ㄱ무지에서 석탄을 몇t 가져갔습니까?

〔풀이〕 ㄴ무지에 남은 석탄이 모두의 62.5%보다 13t 적다

고 하였으므로 ㄴ무지에 남은 석탄을 구할수 있습니다.

$$136\times 62.5\%-13=72(t)$$

ㄴ무지에서 $\frac{1}{4}$을 가져가고 72t 남았다는데 의하여 ㄴ무지에 있던 원래의 석탄을 구할수 있습니다.

$$72\div(1-\frac{1}{4})=96(t)$$

그러면 ㄱ무지에 원래 있는 석탄은

$$136-96=40(t)$$

그러므로 ㄱ무지에서 석탄을 몇t 가져갔겠는가를 구하는것은 40t의 30%가 얼마인가를 구하는것입니다. 즉

$$40\times 30\%=12(t)$$

답: ㄱ무지에서 석탄을 12t 가져갔습니다.

〔례5〕 어느 한 학교의 4학년학생은 3학년학생보다 25% 많고 5학년학생은 4학년학생보다 10% 적고 6학년학생은 5학년학생보다 10% 많습니다.

만일 6학년학생이 3학년학생보다 38명 많다면 3학년부터 6학년까지 학생이 모두 몇명이겠습니까?

〔풀이〕 6학년학생이 3학년학생보다 38명 많다는데 의하여 먼저 6학년학생이 3학년학생보다 몇% 많은가를 구합니다.

3학년학생수를 단위 1로 하면 4학년학생은 3학년학생의 $(1+25\%)$이고 5학년학생은 3학년학생의 $(1+25\%)\times(1-10\%)$이고 6학년학생은 3학년학생의 $(1+25\%)\times(1-10\%)\times(1+10\%)$입니다.

즉 $(1+25\%)\times(1-10\%)\times(1+10\%)=\frac{5}{4}\times\frac{9}{10}\times\frac{11}{10}=$

$$=\frac{99}{80}=1\frac{19}{80}$$

그러므로 3학년학생수는 $38\div(1\frac{19}{80}-1)=$

$$=38\div\frac{19}{80}=160(\text{명})$$

4학년학생수는 $160\times(1+25\%)=200$(명)

5학년학생수는 $200\times(1-10\%)=180$(명)

6학년학생수는 $180\times(1+10\%)=198$(명)

3학년부터 6학년까지 총학생수는 $160+200+180+198=738$(명)

답: 3학년부터 6학년까지 학생이 모두 738명 있습니다.

〔례6〕 어느 한 공장에는 원래 가공직장이 두개 있었는데 지금은 3개 직장으로 늘어났습니다.

원래 1직장의 $\frac{1}{3}$과 2직장의 25%로 새로운 1직장을 조직하고 원래 1직장의 25%와 2직장의 $\frac{1}{3}$로 새로운 2직장을 조직하고 나머지 60명으로 새로운 3직장을 조직하였습니다.

새로 조직한 1직장이 새로운 2직장보다 10% 많다면 원래 1직장에는 몇명 있었습니까?

〔**풀이**〕 새로 조직한 1, 2직장 총합은 원래 있던 1, 2직장의 $(\frac{1}{3}+25)\%$에 해당하고 새로운 3직장은 원래의 $(1-\frac{1}{3}-25\%)$에 해당합니다.

그러면 원래의 총인원수를 구할수 있습니다.

$$60\div(1-\frac{1}{3}-25\%)=60\div\frac{5}{12}=144(\text{명})$$

새로운 1, 2직장의 합은

$$144\times(\frac{1}{3}+0.25)=84(\text{명})$$

새로 조직한 2직장은

$$84 \div (1+1+10\%)=40(\text{명})$$

새로 조직한 1직장은

$$84-40=44(\text{명})$$

원래 1직장에 x명 있었다면 2직장에는 $(144-x)$명 있었습니다.

$$\frac{1}{3}x+(144-x)\times 25\%=44$$

$$\frac{1}{12}x=8$$

$$x=96$$

답: 원래 1직장에는 96명 있었습니다.

〔례7〕 과수농장에서 포도 4t을 측정한 수분포함량은 99%이고 공장에 실어온 후 측정한 수분량은 98%입니다.

포도를 공장에 실어온 후 몇t 남았겠습니까? (도중에서 썩는 등 다른 손실은 계산하지 않습니다.)

〔풀이〕 포도를 농장에서 공장으로 실어오면 일부분의 수분을 잃기때문에 포도의 질량이 가벼워집니다.

그러나 마른 포도의 질량은 변하지 않습니다. 마른 포도의 질량은

$$4\times(1-99\%)=0.04(\text{t})$$

마른 포도의 질량 0.04t은 공장에 실어온 후 총질량의 (1−98%)에 해당됩니다.

그러므로 포도를 공장에 실어왔을 때 남는것은

$$0.04\div(1-98\%)=2(\text{t})$$

답: 포도를 공장에 실어오면 2t 남습니다.

련습 19−1

1. 어떤 상품에 대한 가격을 두번 낮추었습니다. 첫번에는 10% 낮추고 두번째는 20% 낮추었습니다. 지금의 가격은 원래가격의 몇%에 해당됩니까?

2. ㄱ수는 ㄴ수보다 20% 크고 ㄴ수는 ㄷ수보다 20% 작습니다. ㄱ수는 ㄷ수의 몇%에 해당합니까?

3. ㄱ차는 A곳으로부터 B곳까지 가는데 8시간 걸리고 ㄴ차는 A곳으로부터 B곳까지 가는데 10시간 걸립니다. ㄱ차는 ㄴ차보다 얼마나 더 빠릅니까?

4. 창고에 쌀이 얼마간 있는데 첫번째에 25t 꺼내고 두번째에 나머지의 40%를 꺼내니 아직 절반이 남았습니다. 이 쌀은 원래 몇t이였겠습니까?

5. 기차를 타고 ㄱ도시에서 ㄴ도시로 가는데 원래 19.5시간 걸리던 기차의 속도를 처음에는 30% 올리고 두번째에는 25% 올렸으며 세번째에는 20%로 올렸습니다.

세차례 속도를 올린 후 기차를 타고 ㄱ도시에서 ㄴ도시로 가는데 몇시간 걸리겠습니까?

6. ㄱ작업반에 로동자가 600명 있는데 그가운데서 나이많은 로동자가 5%를 차지합니다. ㄴ작업반에도 400명 있는데 그가운데서 나이많은 로동자가 20%를 차지합니다.

ㄱ, ㄴ작업반에서 나이많은 로동자가 차지하는 %를 같게 하려면 ㄴ작업반에서 나이많은 로동자를 몇명 뽑아 ㄱ작업반의 젊은 로동자와 교체해야 하겠습니까?

7. 시험에 5문제가 나왔습니다. 1, 2, 3, 4, 5번을 맞게 푼 학생은 각각 시험에 참가한 학생의 92%, 86%, 61%, 87%, 57%입니다.

만일 세문제 혹은 세문제이상을 맞게 풀면 최우등생이라고 할 때 최우등생률은 적어서 얼마입니까?

8. ㄱ, ㄴ 두사람은 각각 A, B 두곳에서 동시에 마주 떠났습니다. 출발할 때 그들의 속도비는 3:2였습니다.

두사람이 서로 만난 후 ㄱ의 속도는 20% 빨라지고 ㄴ의 속도는 50% 빨라졌습니다.

ㄱ가 B에 도착하였을 때 ㄴ는 아직 A곳에서 4㎞ 떨어져있었습니다.

A, B 두곳사이의 거리는 몇㎞입니까?

9. 기름 한통이 있는데 30%를 쓴 후 통을 포함한 질량은 16㎏입

니다. 50%를 쓴 후에는 통을 포함한 질량이 12kg입니다. 이 통에 기름이 몇kg 있었습니까?

10. 사탕 두봉지가 있습니다. 매 봉지에는 모두 우유사탕, 과일사탕과 박하사탕이 섞여있습니다. 첫번째 봉지의 사탕알수는 두번째 봉지의 사탕알수의 $\frac{2}{3}$이고 첫째 봉지에서의 우유사탕은 25%이며 두번째 봉지에서의 과일사탕은 50%입니다.

박하사탕이 첫번째 봉지에서 차지하는 %는 두번째 봉지에서 차지하는 %의 2배입니다.

두봉지의 사탕을 섞은 후 박하사탕이 28% 차지합니다. 그러면 과일사탕은 몇%이겠습니까?

제2절 리윤문제

리윤이라는것은 원가의 기초우에 가격을 높여서 팔아서 번 리득을 말합니다.

리윤률＝(가격－원가)÷원가

가격＝원가×(1＋리윤률)

중 점

1. 퍼센트응용문제의 풀이방법에 기초하여 리윤문제를 풀줄 알아야 합니다.

2. 탐구를 통해 리윤문제가 실지생활에서 어떤 의의를 가지는가를 인식하고 리윤문제를 푸는 능력을 키워야 합니다.

〔례1〕 어떤 상품을 20%의 리윤률에 따라 가격을 매긴 다음 88%로 낮추어 팔아 모두 84원의 리윤을 얻었습니다. 이 상품의 원가는 몇원입니까?

〔**풀이**〕 상품의 원가를 단위 1로 보면 가격은 원가의 $1+20\%=$ $=120\%$입니다. 88%로 낮춘 후의 판매가격은

$$(1+20\%)\times 88\%=105.6\%$$

그러면 실제리윤률은

$$105.6\%-1=5.6\%$$

상품의 원가는

$$84\div 5.6=1500(원)$$

답: 상품의 원가는 1500원입니다.

〔**례2**〕 어떤 상품을 가격의 80%에 팔아도 여전히 20%의 리윤을 얻을수 있습니다.

가격을 정했을 때 리윤은 몇%이겠습니까?

〔**풀이**〕 20%의 리윤을 얻을수 있다는데 의하여 80%로 낮춘 후에 실제판매가격은 원가의 120%라는것을 알수 있습니다.

$$120\%\div 80\%=150\%$$

그러므로 원래의 리윤률은

$$150-1=50\%$$

답: 리윤은 50%입니다.

〔**례3**〕 어떤 상품을 가격에 따라 팔아서 하나에 45원의 리윤을 얻었습니다.

이제 가격의 85%로 낮추어 8개를 팔아 얻는 리윤은 한개에 35원씩 낮추어 12개를 팔아 얻는 리윤과 같습니다. 이 상품의 가격은 몇원입니까?

〔**풀이**〕 원래 하나에 45원의 리윤을 얻습니다. 지금 한개에서 35원씩 줄여 12개를 팔아 얻는 리윤은 $(45-35)\times 12=120(원)$입니다.

문제의 조건에 의하여 120원은 가격의 85%로 낮추어 8개를 팔아 얻는 리윤입니다. 그러면 매개 상품에서 적게 버는 돈은

$$45-120\div 8=30(원)$$

85%로 낮추어 팔면 가격의 $15\%(1-85\%=15\%)$를 적게 벌기때문에 가격은 $30\div 15\%=200(원)$

답: 상품의 가격은 200원입니다.

〔례4〕 어느 한 상점에서 상품값을 얼마간 낮추어 팔았습니다. 만일 가격의 10%를 낮추어 판다면 215원의 리윤을 얻을수 있고 가격의 20%를 낮추어 판다면 125원 밑지게 됩니다. 이 상품의 가격은 얼마입니까?

〔풀이〕 두번째로 줄인것은 첫번째보다 가격의 10%를 더 낮추었기때문에 두번째에서는 첫번째보다 340원(215＋125＝340) 적게 팔았습니다.

이것은 가격의 10%가 340원이라는것을 말합니다. 그러므로 이 상품의 가격은

$$(215+125)\div(20\%-10\%)=3400(\text{원})$$

그러면 이 상품의 가격은

$$3400\times(1-10\%)-215=$$
$$=3060-215=$$
$$=3845(\text{원})$$

답: 이 상품의 가격은 3845원입니다.

〔례5〕 어느 한 사람이 어떤 곳에 가서 하나에 100원씩 하는 상품을 모두 60개 사기로 하였습니다.

그런데 상품 한개에 1원씩 낮춘다면 3개씩 더 살수 있었습니다. 만일 4% 낮춘다고 하여도 그 사람이 더 사겠다고 하였기때문에 여전히 원래와 같은 총리윤을 얻을수 있었습니다. 이 상품의 원가는 얼마입니까?

〔풀이〕 4% 낮추었으므로 지금 한개에 96원〔$100\times(1-4\%)=$ $=96$〕이라는것을 알수 있습니다.

매 한개에 1원씩 낮춘다면 3개씩 더 사겠다고 한데로부터 72개를 사야 한다는것을 알수 있습니다.

즉 $60+3\times4=72$(개)

이 상품의 원가가 x원이라면 총리윤이 같다는데 의하여 방정식을 세울수 있습니다.

$$(100-x)\times60=(96-x)\times72$$

$12x=912$

$x=76$

답: 이 상품의 원가는 76원입니다.

련습 19－2

1. 한 상점에서 가격에 따라 상품을 팔면 리윤을 960원 얻을 수 있습니다.

만일 가격의 80%에 판다면 832원 손해를 봅니다. 이 상품의 원래가격은 얼마입니까?

2. 어떤 상품의 리윤률은 20%입니다. 만일 구입가격을 20% 낮추고 판매가격이 변하지 않는다면 상품의 리윤은 얼마입니까?

3. 상점에서는 한컬레에 6.5원으로 양말을 가져다가 7.4원으로 팔았습니다.

5컬레가 남을 때까지 팔았을 때 원가를 제하고도 44원의 리윤을 얻었습니다.

양말은 모두 몇컬레입니까?

4. 체육기자재상점에서는 2400원으로 롱구공과 축구공을 들여왔는데 롱구공은 축구공보다 15개 많습니다.

상점에서 파는 축구공의 가격은 20원이고 롱구공의 가격은 축구공보다 20% 많습니다.

이 공들을 다 팔면 리윤을 모두 820원 얻게 됩니다. 축구공과 롱구공은 각각 몇개입니까?

5. 어느 한 책방에서 책을 한권씩 팔 때마다 리윤을 18원씩 얻었습니다.

책의 $\frac{2}{5}$를 판 후 한권에 10원씩 낮추어 몽땅 팔아 리윤을 모두 3000원 얻었습니다.

책방에서는 책을 몇권 팔았습니까?

6. 사과 한상자를 1kg에 1.6원씩 팔면 10원 밑지고 1kg에 2.2원씩 팔면 5원을 법니다.

밑지지도 않고 벌지도 않으려면 1kg에 몇원씩 팔아야 합니까?

7. 어느 한 상점에서는 어떤 상품을 원래가격의 80%에 팔기로 하였습니다.

이렇게 하면 얻는 리윤이 원래계획의 40%밖에 안됩니다. 상품의 가격은 하나에 4원입니다.

원래 리윤을 600원 얻으려고 하였습니다. 상품이 모두 몇개 있습니까?

8. 상품 ㄱ의 원가는 가격의 80%이고 상품 ㄴ의 가격은 275원이며 원가는 220원입니다.

지금 상점에서는 ㄱ상품 1개와 ㄴ상품 2개를 맞추어 파는데 그것들의 가격의 합의 90%에 팝니다.

그러면 매 조에서 리윤을 80원씩 얻을수 있습니다. ㄱ상품의 원가는 얼마입니까?

제3절 농도문제

중 점

1. 농도문제를 풀 때에는 먼저 농도와 관계되는 수량관계식을 리해하여야 합니다.

농도＝용질÷(용질＋용매)

용질＝용액×농도

2. 농도문제의 풀이방법을 잘 선택해야 합니다.

3. 어려운 문제에 대해서는 절차를 나누어 분석하고 풀어야 합니다.

〔례1〕 농도가 25%인 소금물 60g을 농도가 6%인 소금물로 만들려고 합니다. 어떻게 해야 합니까?

〔풀이〕 25%의 소금물을 6%로 만들려면 반드시 물을 넣어야 합니다.

물량이 커지면 소금물의 량도 커집니다. 변하지 않는 량은 소금의 량입니다.

소금량이 변하지 않으므로 먼저 소금의 질량을 구합니다.

$$60\times25\%=15(g)$$

소금물에 몇그람의 물을 넣으면 6% 소금물로 되는가 봅니다. 소금은 15g이므로 지금의 소금물질량에서 원래 소금물의 질량을 덜면 물의 질량을 구할수 있습니다.

즉 $15\div6\%-60=190(g)$

답: 물 190g을 넣어야 합니다.

〔례2〕 농도가 20%인 사탕물이 350g 있습니다.

이것을 농도가 30%인 사탕물로 변화시키려면 사탕을 몇g 넣어야 합니까?

〔풀이〕 문제의 조건에 의하여 농도가 20%인 사탕물에 사탕을 넣으면 원래의 사탕물의 농도를 변화시킬수 있습니다. 사탕의 질량이 불어나면 사탕물의 농도도 따라서 불어납니다. 그러나 물의 질량은 변하지 않습니다.

먼저 원래 사탕물중의 물의 질량을 구합니다.

$$350\times(1-20\%)=280(g)$$

280g의 물은 지금 사탕물중의 물의 질량입니다.

사탕물의 질량$\times(1-30\%)=280$에 의하여 지금의 사탕물의 질량을 구할수 있습니다.

현재 사탕물의 질량에서 원래 사탕물의 질량을 덜면 사탕의 질량을 구할수 있습니다.

$$280\div(1-30\%)-350=50(g)$$

답: 사탕을 50g 넣어야 합니다.

〔례3〕 소금이 8% 들어있는 소금물이 40kg 있습니다.

소금이 20% 들어있는 소금물 100kg을 얻어내려면 넣어야 할 소

금물의 농도는 몇%이겠습니까?

〔**풀이**〕 문제의 조건에 의하여 새로운 소금물을 넣은 후 소금물의 총질량은 100kg 됩니다.

그러면 넣는 소금물의 질량을 구할수 있습니다.

$$100-40=60(\text{kg})$$

넣는 소금물의 농도를 구하려면 반드시 넣는 소금물 60kg에 소금이 몇kg이 들어있어야 하는가를 구해야 합니다.

소금이 8% 들어있는 소금물 40kg이라고 하였으므로 원래 소금물에 들어있는 소금량을 구할수 있습니다.

또한 소금이 20% 들어있는 소금물 100kg에 의하여 현재 소금물에 들어있는 소금량을 구할수 있습니다.

이 두개의 차가 바로 넣는 소금물에 들어있는 소금량입니다.

즉 $100\times20\%-40\times8\%=$

$=20-3.2=16.8(\text{kg})$

넣는 소금물의 농도는

$$16.8\div60\times100\%=28\%$$

답: 넣는 소금물의 농도는 28%입니다.

〔**례4**〕 농도가 60%인 알콜용액 200g과 농도가 30%인 알콜용액 300g을 섞어 얻는 알콜용액의 농도는 얼마입니까?

〔**풀이**〕 섞은 후 용액의 농도를 구하려면 반드시 섞은 후의 용액의 총질량과 거기에 들어있는 순수한 알콜의 질량을 구하여야 합니다.

섞은 후의 용액의 총질량 즉 원래 두가지 용액의 질량의 합

$$200+300=500(\text{g})$$

섞은 후 순수한 알콜이 들어있는 량은 섞기 전에 두가지 용액에 들어있는 순수한 알콜의 합입니다.

$$200\times60\%+300\times30\%=120+90=210(\text{g})$$

그러면 섞은 후 알콜용액의 농도는

$$210\div500\times100\%=42\%$$

답: 농도는 42%입니다.

〔례5〕 농도가 50%인 류산용액 100kg에 농도가 5%인 류산용액 몇kg을 더 넣어야 25%인 류산용액을 만들수 있겠습니까?

〔풀이〕 농도가 5%인 류산용액을 $x$kg 넣어야 한다면

$$100\times50\%+x\times5\%=(100+x)\times25\%$$
$$50+0.05x=25+0.25x$$
$$0.2x=25$$
$$x=125(\text{kg})$$

답: 농도가 5%인 류산용액을 125kg 넣어야 합니다.

〔례6〕 농도가 50%인 소금물 200g이 가득찬 고뿌에서 40g을 쏟은 후 다시 맑은 물을 고뿌에 가득채웠습니다.

그다음 다시 소금물을 40g 쏟아낸 후 다시 맑은 물을 고뿌에 가득채웠습니다. 이렇게 세번 반복하면 고뿌의 소금물의 농도는 얼마입니까?

〔풀이〕 문제의 조건에 의하여 다음과 같은것을 알수 있습니다. 매번마다 고뿌의 소금물은 질량이 200g입니다.

그러므로 매번 고뿌의 소금의 질량과 대응하는 농도를 각각 구할수 있습니다.

원래 고뿌의 소금의 질량은

$$200\times50\%=100(\text{g})$$

첫번에 쏟아낸 소금물의 소금의 질량은 $40\times50\%=20(\text{g})$

40g 쏟아내고 다시 맑은 물을 넣은 후 소금물의 농도는

$$(100-40\times50\%)\div200\times100\%=40\%$$

두번째로 쏟아낸 소금물에 있는 소금의 질량은

$$40\times40\%=16(\text{g})$$

40g 쏟아내고 다시 맑은 물을 넣은 후 소금물의 농도는

$$(100-20-16)\div200\times100\%=32\%$$

세번째 쏟아낸 소금물에 들어있는 소금의 무게는

$$40\times32\%=12.8(\text{g})$$

40g 쏟아내고 다시 맑은 물을 넣었을 때 소금물의 농도는

$$(100-20-16-12.8)\div200\times100\%=25.6\%$$

답: 소금물의 농도는 25.6%입니다.

〔례7〕 ㄱ, ㄴ, ㄷ 세고뿌에 물이 각각 10g, 20g, 30g 담겨있습니다.

A농도를 가진 소금물 10g을 ㄱ고뿌에 부어넣고 섞은 후 10g 쏟아 ㄴ고뿌에 부어넣고 다시 섞은 후 또 ㄴ고뿌에서 10g 쏟아 ㄷ고뿌에 부어넣었습니다.

지금 ㄷ고뿌의 소금물의 농도는 2%입니다. A농도는 몇%입니까?

〔**풀이**〕 섞은 후 ㄱ, ㄴ, ㄷ 세개 고뿌에 있는 소금물은 각각 20g, 30g, 40g입니다.

ㄷ고뿌의 소금물의 농도가 2%이므로 소금의 질량을 구할수 있습니다.

그리고 ㄷ고뿌에 원래 물이 30g만 있었기때문에 그것의 소금은 ㄴ고뿌에서 쏟아낸 10g의 소금물중의것입니다.

그러므로 ㄴ고뿌의 30g 소금물중에 소금이 모두 몇g 있었는가를 구할수 있습니다.

$$(30+10)\times 2\% \div 10=$$
$$=40\times 2\% \div 10=$$
$$=8\%$$
$$(20+10)\times 8\%=2.4(g)$$

ㄴ고뿌의 소금은 ㄱ고뿌에서 쏟아낸 소금물 10g중의것입니다.

그러므로 ㄱ고뿌의 소금물에 들어있는 소금량을 구할수 있습니다.

2.4g의 소금은 ㄱ고뿌중의 10g의 소금물에 들어있는 소금량입니다.

그러면 ㄱ고뿌의 소금물의 농도는 2.4÷10=24%입니다.

ㄱ고뿌에 들어있는 소금량은 10g의 A농도의 소금물에 들어있는 소금량입니다.

그러면 A농도는

$$20\times 24\% \div 10=48\%$$

답: A농도는 48%입니다.

련습 19－3

1. 농도가 15%인 사탕물 200g에 물을 몇g 넣으면 농도가 10%인 사탕물을 얻을수 있습니까?

2. 농도가 2.5%인 소금물 210g 있습니다.

이것으로 농도가 3.5%인 소금물을 만들려면 물을 몇g 증발시켜야 합니까?

3. 농도가 80%인 소금물 80g과 농도가 40%인 소금물 40g을 섞었습니다.

소금물의 농도는 얼마입니까?

4. 농도가 80%인 소금물 100g을 가득 채운 고뿌에서 소금물 40g을 쏟아낸 후 다시 맑은 물을 고뿌에 가득채웠습니다.

다시 소금물을 40g 쏟아낸 다음 또 맑은 물을 고뿌에 가득채웠습니다.

이렇게 세번 반복한 후 고뿌의 소금물의 농도는 얼마겠습니까?

5. ㄱ술에는 순수한 알콜이 40% 들어있고 ㄴ술에는 순수한 알콜이 36% 있으며 ㄷ술에는 순수한 알콜이 35% 들어있습니다. 세가지 술을 섞어서 순수한 알콜이 38.5% 들어있는 술을 11kg 얻었습니다. ㄴ술은 ㄷ술보다 3kg 더 많습니다. 그러면 ㄱ술은 몇kg 있겠습니까?

6. ㄱ용기에는 8%인 소금물이 300g 있고 ㄴ용기에는 12.5%인 소금물이 120g 있습니다.

ㄱ, ㄴ 두 용기에 물을 각각 같은 량을 부어넣어 두 용기의 소금물의 농도가 같게 하였습니다.

매개 용기에 물을 몇g 넣어야 하겠습니까?

7. A, B, C 세개의 관이 있습니다. A관에서는 매초 4g의 류실로 소금함량이 20%인 소금물이 흘러나오고 B관에서는 매초 6g의 류실로 소금함량이 15%인 소금물이 흘러나오며 C관에서는 매초 10g의 물이 흘러나옵니다. 그런데 C관을 열면 처음 2초간은 흘러나오지 않다가 이어서 5초간은 흘러나오고 그다음 2초간은 정지했다가 다시 5초간 흘러나옵니다. …지금 세 관을 동시에 열

고 1분후에 모두 닫았습니다. 이때 얻은 혼합용액중에는 소금이 몇 % 들어있겠습니까?

8. ㄱ용기에는 농도가 4%인 소금물이 150g 담겨있고 ㄴ용기에는 어떤 농도의 소금물이 얼마 들어있습니다.

ㄴ용기에서 소금물 450g을 쏟아 ㄱ용기에 넣어 농도가 8.2%인 소금물을 만들었습니다.

ㄴ용기의 소금물의 농도를 구하시오.

9. ㄱ알콜용액의 순알콜량은 72%, ㄴ알콜용액의 순알콜량은 62%입니다.

두가지 알콜용액을 얼마씩 쏟아 섞은 알콜용액에는 순알콜함량이 62% 들어있습니다.

만일 한가지 알콜용액을 선택한 수량이 모두 원래보다 15ℓ 많다면 혼합한 알콜용액의 순알콜함량이 63.25%로 변합니다.

그러면 첫번째로 혼합할 때 ㄱ알콜용액을 몇ℓ 쏟아냈겠습니까?

10. 20%의 소금물과 5%의 소금물을 섞어 15%의 소금물 600g을 만듭니다. 20%의 소금물과 5%의 소금물이 각각 몇g 요구되겠습니까?

제20장 원기둥과 원뿔

중점

1. 원기둥의 밑면적, 옆면적과 겉면적을 정확하게 계산할줄 알아야 합니다.
2. 원기둥, 원뿔과 구의 체적을 계산하는 서로 다른 방법을 잘 선택해야 합니다.

〔례1〕 2개의 크고작은 덮개가 없는 원기둥물통이 있습니다. 그것들의 겉면적의 합은 5433㎠이고 작은 통과 큰 통에 쓴 재료의 면적의 비는 1：2입니다. 그리고 작은 통의 밑면의 둘레의 길이는 62.8㎝이고 큰 통의 밑면의 둘레의 길이는 94.2㎝입니다. 크고 작은 두 통의 옆면적은 각각 얼마입니까?

〔풀이〕 큰 통의 겉면적：$5433\times\frac{2}{1+2}=3622$(㎠)

작은 통의 겉면적：$5433\times\frac{1}{1+2}=1811$(㎠)

큰 통의 반경：$94.2\div3.14\div2=15$(㎝)

작은 통의 반경：$62.8\div3.14\div2=10$(㎝)

큰 통의 밑면적：$3.14\times15^2=706.5$(㎠)

작은 통의 밑면적：$3.14\times10^2=314$(㎠)

큰 통의 옆면적：$3622-706.5=2919.5$(㎠)

작은 통의 옆면적：$1811-314=1497$(㎠)

답: 큰 통의 옆면적은 2919.5㎠이고 작은 통의 옆면적은 1497㎠입니다.

〔례2〕 직4각형양철판이 한장 있습니다. (그림 113) 그림에서 두

원과 한개 직4각형을 베내서 한개 원기둥을 만들었습니다. 이 원기둥의 밑면의 반경은 10㎝입니다. 그러면 원래 직4각형양철의 면적은 몇㎠입니까?

그림 113

〔풀이〕 직4각형양철판의 면적을 구하려면 양철판의 길이와 너비를 구해야 합니다. 그림으로부터 직4각형의 너비는 원의 직경 즉 20㎝입니다. 직4각형의 길이는 3개 부분으로 나눕니다. 왼쪽과 오른쪽은 각각 원의 직경이고 중간부분의 길이는 만든 원기둥의 밑면의 둘레의 길이인데 $3.14 \times 10 \times 2$로 구할수 있습니다. 그러면 직4각형의 길이를 구할수 있습니다.

$$10 \times 2 = 20(㎝)$$
$$3.14 \times 20 + 20 \times 2 = 102.8(㎝)$$
$$102.8 \times 20 = 2056(㎠)$$

답: 면적은 2056㎠입니다.

〔례3〕 한 원기둥의 밑면의 직경은 4㎗이고 옆면적은 62.8㎗²입니다. 그 체적은 몇㎗³입니까?

〔풀이〕 원기둥의 체적을 구하려면 밑면적과 높이를 알아야 합니다. 여기서 기본은 원기둥의 높이를 구하는것입니다. 높이는 옆면적을 밑면의 둘레의 길이로 나누어 구합니다.

$$62.8 \div (3.14 \times 4) = 5(dm)$$
$$4 \div 2 = 2(dm)$$
$$3.14 \times 2^2 \times 5 = 62.8(dm^3)$$

답: 체적은 62.8㎥입니다.

〔례4〕 병높이는 25㎝이고 아래부분은 직원통형입니다. 안에 기름을 400g을 넣으면 기름면의 높이가 14㎝로 됩니다. 그것을 거꾸로 세우면 기름면의 높이가 18㎝ 됩니다. 이 병에 기름을 몇g 담을수 있습니까?(그림 114)

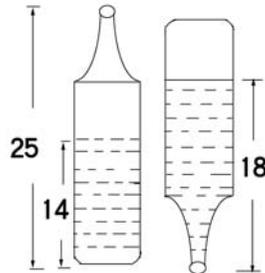



그림 114

〔풀이〕 병안의 기름의 체적은 일정합니다. 병의 용적도 일정합니다. 그러므로 바로 놓거나 거꾸로 놓

았을 때 웃쪽의 빈 부분의 체적은 같습니다. 두번째(거꾸로 세운) 병에서 빈 부분의 높이가 7㎝라는것을 알수 있습니다. 두 병을 종합적으로 관찰하면 기름의 높이는 빈 부분의 높이의 2배(14÷7=2)라는것을 알수 있습니다.

만약 빈 부분에 기름을 채운다면 넣는 기름의 무게는 지금있는 기름의 절반입니다.

$$14 \div (25-18) = 2$$

$$400 \div 2 + 400 = 600(g)$$

답: 기름을 600g 담을수 있습니다.

〔례5〕 밑면이 바른4각형인 그릇에 물이 담겨있습니다. 안으로 잰 변의 길이는 14㎝이고 물의 높이는 8㎝입니다. 철로 된 속이 비지 않은 원뿔을 그릇에 곧게 세웠더니 물의 높이가 12㎝까지 올라갔습니다. 이것은 원뿔의 높이의 $\frac{1}{2}$입니다. 원뿔의 밑면적은 얼마입니까?

〔풀이〕 원뿔의 물우의 체적은 원뿔체적의 $(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$이고 원뿔의 물아래부분의 체적은 원뿔체적의 $\frac{7}{8}$입니다. 그러므로 원뿔의 체적은

$$14 \times 14 \times (12-8) \div \frac{7}{8} =$$

$$= 14 \times 14 \times 4 \times \frac{8}{7} =$$

$$= 896(㎤)$$

원뿔의 높이 : $12 \div \frac{1}{2} = 24$(㎝)

원뿔의 밑면적 : $896 \times 3 \div 24 = 112$(㎠)

답: 원뿔의 밑면적은 112㎠입니다.

〔례6〕 두께가 0.25㎜인 흰색인쇄종이를 감아서 속이 빈 원기둥(종이는 빽빽하게 감아서 공간이 없습니다.)을 만들었습니

다. 그 바깥직경은 180㎝이고 아낙직경은 50㎝입니다. 이 인쇄종이의 총길이는 몇m입니까? (π는 3.14를 취합니다.)(그림 115)

〔풀이〕 흰색인쇄종이의 너비(즉 원기둥의 높이)를 ℓ㎝라고 하면 흰색인쇄종이의 총체적은

$$\left[\left(\frac{180}{2}\right)^2-\left(\frac{50}{2}\right)^2\right]\times\pi\times\ell=$$

$$=(8100-625)\times\pi\ell=$$

$$=7475\pi\ell\,(\text{㎤})$$

그림 115

길이가 1㎝인 흰색인쇄종이를 취하면 다음과 같습니다.(그림 116)

그림 116

그 체적은 0.25㎜=0.025㎝

$$1\times0.025\times\ell=0.025\ell\,(\text{㎤})$$

흰색인쇄종이의 총길이는

$$7475\pi\ell\div0.025\ell=$$

$$=7475\pi\div0.025=$$

$$=938860(\text{㎝})$$

938860㎝=9388.6m

답: 총길이는 9388.6m입니다.

〔례7〕 길이, 너비, 높이가 각각 8㎗, 7㎗, 6㎗인 직6면체를 깎아서 제일 크게 원기둥을 하나 만들었습니다. 원기둥의 체적은 몇㎗³입니까?

그림 117

〔풀이〕 원기둥의 체적을 되도록 크게 하려면 밑면적과 높이를 될수록 크게 하여야 합니다. 다음 세가지 경우를 비교해보고 제일 큰 경우를 선택합니다. (그림 117)

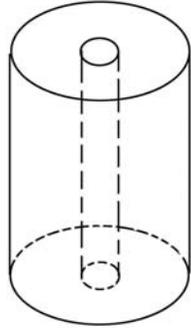
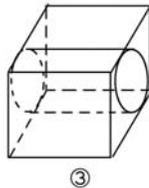
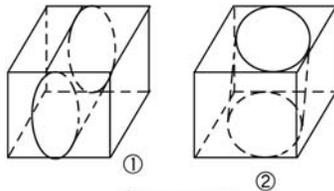



그림 117의 ①에서 원기둥의 밑면의 반경은 3㎝이고 높이는 7㎝이며 체적은 $3.14 \times 3^2 \times 7$입니다.

그림 117의 ②에서 원기둥의 밑면의 반경은 3㎝이고 높이는 8㎝이며 체적은 $3.14 \times 3^2 \times 8$입니다.

그림 117의 ③에서 원기둥의 체적이 그림 ①의 원기둥의 체적보다 더 크다는것을 알수 있습니다.

그림 ②와 그림 ③의 원기둥의 체적을 비교할 때 그림 ③의 원기둥의 체적이 더 큽니다.

$$7 \div 2 = 3.5(\text{㎝})$$

$$3.14 \times 3.5^2 \times 6 =$$
$$= 3.14 \times 12.25 \times 6 =$$
$$= 3.14 \times 73.5 =$$
$$= 230.79(\text{㎤})$$

답: 원기둥의 체적은 230.79㎤입니다.

〔례8〕 같은 재료로 만든 두 구 A와 B가 있습니다. 하나는 속이 비여있고 하나는 속이 비지 않았습니다. A의 직경은 7이고 질량은 22이며 B의 직경은 10.6이고 질량은 33.3입니다. 어느 구가 속이 비지 않았겠습니까?

〔풀이〕 두 구를 같은 재료로 만들었기때문에 두 구의 질량은 그것들의 체적으로 나누고 그 상을 비교할 때 상이 작은것이 속이 빈 구입니다.

구의 체적공식은

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

A구의 체적은

$$V_A = \frac{4}{3} \times \pi \times \left(\frac{7}{2}\right)^3 = \frac{3}{4} \times \pi \times 3.5^3$$

B구의 체적은

$$V_B = \frac{4}{3} \times \pi \times \left(\frac{10.6}{2}\right)^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 5.3^3$$

A구의 단위체적의 질량과 B구의 단위체적의 질량의 비는

$$\frac{22}{V_A} : \frac{33.3}{V_B} = \frac{22V_B}{33.3V_A} =$$

$$= \frac{22 \times \frac{4}{3} \times \pi \times 5.3^3}{33.3 \times \frac{4}{3} \times \pi \times 3.5^3} =$$

$$= \frac{22 \times 53^3}{33.3 \times 35^3} > 1$$

즉 A구의 질량이 B구의 질량보다 더 무겁습니다. 그러므로 A구가 속이 비지 않았습니다.

련습 20

1. 한 원기둥의 옆면그림은 바른4각형입니다. 이 원기둥의 밑면의 직경과 높이의 비는 얼마입니까?

2. 우리 할머니는 국수를 아주 잘 만듭니다. 할머니가 국수를 만드는 절차는 다음과 같습니다. 먼저 밀가루반죽을 하여 원기둥형으로 길이가 1.6m되게 합니다. 그다음 절반을 접어서 1.6m까지 늘굽니다. 다시 절반을 접어서 1.6m까지 늘굽니다. …이렇게 계속합니다. 마지막에 늘군 국수의 굵기 (직경)는 원래 굵기의 $\frac{1}{64}$입니다. 마지막에 늘군 국수의 총길이는 얼마입니까?

3. 세계적으로 가장 먼저 나온 등대는 기원전에 만든것입니다. 이 등대는 3층으로 되여있는데 매층의 높이는 다 27m입니다. 맨 아래층은 4각기둥이고 중간기둥은 바른8각기둥이며 웃층은 바른원뿔입니다. 웃층의 체적은 얼마입니까? (그림 118)

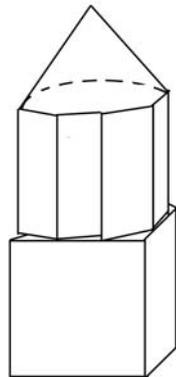



그림 118

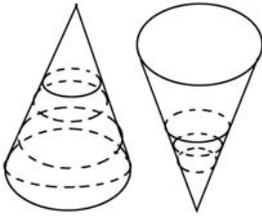



그림 119

4. 꼭같은 두 원뿔형용기에 물이 각각 얼마간 담겨있습니다.(그림 119) 물의 높이는 모두 원뿔의 높이의 절반입니다. 그러면 ㄱ용기의 물의 체적은 B용기의 물의 체적의 몇배입니까?

5. 길이, 너비, 높이가 각각 9㎝, 7㎝와 3㎝인 직6면체쇠덩이 1개와 한변의 길이가 5㎝인 바른6면체쇠덩이 1개를 녹여 원기둥 하나를 만들었는데 그 밑면의 반경은 4㎝입니다. 원기둥의 높이는 얼마이며 원기둥의 질량은 몇g입니까? (쇠덩이 1㎤의 질량은 7.8g입니다. 답은 1g까지 정확하게 하시오.)

6. 에짚트의 이름난 피라미드는 바른4각뿔모양입니다. 바른4각형밑면의 변의 길이가 230.4m이고 피라미드의 높이는 146.7m입니다. 피라미드를 만든 재료가 모두 석회석이라고 합니다. 석회석 1㎥의 질량은 2700㎏입니다. 그러면 피라미드의 총질량은 몇㎏입니까?

7. 실험실에 높이가 같은 두 용기가 있습니다.(그림 120) 원뿔형용기의 반경은 9㎝이고 원기둥형용기의 반경은 6㎝입니다. 원뿔형용기에 물을 가득 담아서 원기둥형용기에 넣었습니다. 이때 물의 깊이는 용기높이의 $\frac{6}{7}$보다 3㎝ 낮았습니다. 두 용기의 높이는 몇㎝입니까?

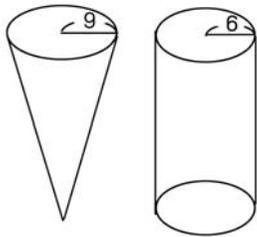



그림 120

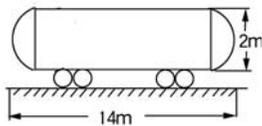



그림 121

8. 철도에서 쓰는 유조차는 2개의 반구면과 하나의 원기둥면 강판을 용접해 만들었습니다. 그 모양은 그림 121과 같습니다. 이 유조차의 용적은 몇㎥입니까?

9. 원기둥형용기에 물이 얼마간 있습니다. 용기밑면의 반경은 5㎝이고 높이는 20㎝이며 물의 깊이는 10㎝입니다. 밑면

의 반경이 1㎝이고 높이가 15㎝인 원기둥쇠막대기를 용기에 수직으로 꽂아넣어 쇠막대기밑면이 용기밑면과 접촉하게 하였습니다. 이때 물의 깊이는 몇㎝이겠습니까?

그림 122

10. ABCD는 직각사다리형입니다.(단위 ㎝)

① AB를 축으로 하여 사다리형을 축을 따라 한바퀴 회전시켜 회전체를 얻었습니다. 그 체적은 얼마입니까?

② 만일 CD를 축으로 하여 사다리형을 한바퀴 회전시킨다면 얻는 회전체의 체적이 얼마이겠습니까?(그림 122)

11. 하나의 원뿔형용기 ㄱ와 하나의 반구형용기 ㄴ가 있습니다. 원형아구리의 직경과 용기의 높이는 그림과 같습니다.(그림 123)(단위 dm) ㄱ용기로 물을 퍼서 ㄴ용기에 가득 채우려면 적어도 물을 몇번 퍼담아야 하겠습니까?

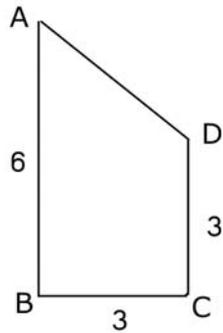
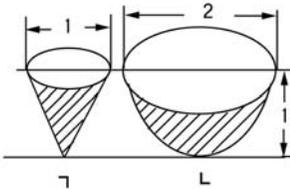



그림 123

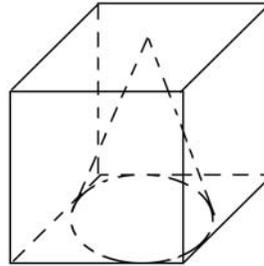



그림 124

12. 한 바른6면체나무토막의 체적은 20㎤입니다. 이 나무토막을 가공하여 원뿔형나무토막을 크게 하나 만들었습니다. 이 원뿔형나무토막의 체적은 몇㎤입니까?(그림 124)

참고답안과 제시

제10장 수의 완제

제1절 완제에 관한 문제풀이(10－1)

1. 2 또는 8

2. 세번

3. 3600　　4. 6,　　5. 9.　　6. 3쌍

7. 315

8. 백의 자리와 일의 자리의 수자의 합은 천의 자리와 열의 자리의 수자의 합과 같아야 하고 다 10이여야 합니다. 그중 제일 작은 수는 천의 자리와 백의 자리가 다 1이고 열의 자리와 일의 자리가 다 9인 수입니다.

따라서 이러한 제일 작은 수는 1199입니다.

9. abc를 세자리수 (a는 1～9중의 한 옹근수이고 b, c는 0～9중의 한 옹근수입니다.)라고 하면

$abc-(a+b+c)=$

$=100a+10b+c-a-b+c=$

$=99a+9b=9\times(11a+b)$

즉 $9|[abc-(a+b+c)]$

따라서 $9|46x$ 이로부터 $x=8$을 얻을수 있습니다.

10. 이미 가져간 화물 5상자의 무게는 3의 배수입니다. 그리고 화물 6상자의 총무게 15＋16＋18＋19＋20＋31＝119(㎏)을 3으로

나누면 나머지가 2입니다.

따라서 남은 한상자의 화물의 무게를 3으로 나누어도 나머지는 2입니다.

그러므로 풀이는 20kg입니다.

11. $5ab5ab=5ab\times1000+5ab=$

$=5ab\times1001=$

$=5ab\times11\times91$

그러므로 $91|5ab5ab$

또 $\underbrace{5ab5ab\cdots5ab}_{5ab\ 99개}=\underbrace{5ab5ab\cdots5ab}_{5ab\ 98개}\times1000+5ab$

따라서 $91|\underbrace{5ab5ab\cdots5ab}_{5ab\ 99개}$ 되려면 $91|5ab$되여야 합니다.

그런데 546만이 91로 완제되므로 $5ab=546$입니다.

12. 4

13. 두 수의 적으로 4875를 완제할수 있다고 하였으므로 이것은 두 수가 모두 4875의 약수라는것을 말해줍니다.

4875를 인수분해하면

$$4875=3\times5\times5\times5\times13$$

이 수들로 합이 64인 두 수를 만들면 $3\times13=39$와 $5\times5=25$뿐입니다.

그러므로 그 차는 $39-25=14$입니다.

14. 첫번째로 번호를 부른 후 남은 학생의 처음번호는 모두 11의 배수입니다. 두번째로 번호를 부른 후 남은 학생의 처음번호는 모두 121의 배수입니다. 세번째로 번호를 부른 후 남은 학생의 번호는 $121\times11=1331$의 배수입니다. 그러므로 마지막에 남은 학생은 한사람뿐입니다.

그의 처음번호는 1331입니다.

15. 이 수의 홀수자리의 수자의 합과 짝수자리의 수자의 합의 차 d는 11의 배수입니다. 그런데 합은 홀수 13입니다. 그러므로 d는 오직 11의 홀수배입니다. 또 이 수는 커서 네자리수입니다. 그

러므로 홀수자리의 수자의 합과 짝수자리의 수자의 합은 모두 9+9=18보다 작습니다. 그러므로 d=11입니다. 홀수자리와 짝수자리의 수자의 합은 12, 1이거나 1, 12입니다.

그러므로 이 수는 적어서 세자리수입니다.

세자리수라면 913, 814, 715, 616, 517, 418, 319 7개일수 있습니다. 네자리수라면 1903, 1804, 1705, 3091, 1606, 1507, 1408, 1309 및 3190, 4180, 4081일수 있습니다. 이것을 종합하면 조건을 만족시키는 자연수는 모두 7+7+4=18(개) 있습니다.

16. 이 여섯자리수 $a1997b$는 9로 완제되므로 $a+1+9+9+7+$ $+b=a+b+26$은 9로 완제되여야 합니다. $a+b=1$ 또는 10이여야 합니다. 만일 $a+b=1$이라면 $a=1$, $b=0$이여야 합니다. 그런데 119970은 11로 완제되지 않습니다. 그러므로 $a+b=10$입니다. $a1997b$는 11로 완제되므로 $(a+9+7)-(1+9+b)=0$ 또는 11이여야 합니다. 즉 $b-a=6$ 또는 $a-b=5$이여야 합니다. 그런데 $a-b=5$일 때 a, b는 옹근수가 아닙니다. 그러므로 $b-a=6$입니다. 따라서 $a=2$, $b=8$입니다.

조건에 맞는 여섯자리수는 219978입니다.

제2절 씨수, 합성수와 씨인수분해(10－2)

1. 24 2. 128 3. 465 4. 6 5. 12

6. 이 다섯개 수는 오직 24, 25, 26, 27, 28이고 24+25+26+ +27+28=130입니다.

7. 744 8. 같습니다.

9. 4개 2～10 또는 3～11, 또는 11～19 등에서

10. 두자리수가운데서 제일 큰것으로부터 작은것으로 가면서 찾습니다. $99=3^2\times11$인데 주어진 수에 11이 없으므로 99는 조건에 맞지 않습니다. $98=2\times7^2$인데 씨수가운데 7이 한개뿐이므로 98도 조

건에 맞지 않습니다. 97은 씨수인데 주어진 씨인수중에 없으므로 조건에 맞지 않습니다. $96=2^5\times3$은 조건에 맞습니다.

따라서 두자리 약수가운데서 제일 큰것은 96입니다.

11. $x*3=a$라고 하면 $a*4=a(a+1)(a+2)(a+3)=421200$,

421200을 씨인수분해하면 $421200=2^4\times5^2\times3^4\times13$, 그러면 $a=24$, $a=x*3=x(x+1)(x+2)=24=2^3\times3$

그러므로 $x=2$

12. 먼저 ㄷ가 가진 카드를 봅니다. $63=7\times9=3^2\times7=1\times7\times9$

그러므로 ㄷ는 1, 7, 9 석장 카드를 가졌습니다.

$$48=6\times8=2\times3\times8=2\times4\times6$$

ㄱ, ㄴ, ㄷ가 가진 카드가 다 서로 다르므로 ㄱ가 가진 카드를 2, 3, 8 3장이라고 할수 있습니다. 그러면 나머지 4, 5, 6 3장의 합은 바로 15입니다.

만일 ㄱ가 가진 카드를 2, 4, 6 3장이라고 하면 나머지인 3, 5, 8 3장의 합은 16으로서 조건에 맞지 않습니다.

그러므로 ㄱ는 2, 3, 8의 카드를 가졌고 ㄴ는 4, 5, 6의 카드를 가졌으며 ㄷ는 1, 7, 9의 카드를 가졌습니다.

13. 하나의 자리는 가능한 수가 3, 7이고 열의 자리는 가능한 수가 2, 3, 5, 7입니다. 그런데 27, 35, 57, 77은 조건에 맞지 않습니다. 그러므로 조건에 맞는 수는 23, 37, 53, 73 모두 4개입니다.

14. 두자리씨수의 일의 자리의 수자는 1, 3, 7, 9입니다. 그러나 1, 3은 모두 문제의 뜻에 맞지 않습니다. $1+9$와 $3+9$는 모두 13이 되지 못하기때문입니다.

만일 일의 자리의 수자가 9라면 열의 자리의 수자는 $13-9=4$입니다. 그런데 4는 씨수가 아닙니다. 그러므로 일의 자리의 수자는 오직 7뿐입니다. 열의 자리의 수자는 $13-7=6$입니다. 즉 ㄱ, ㄴ 두사람의 나이의 합은 67입니다. ㄱ는 ㄴ보다 13살 많으므로 ㄱ는 40살, ㄴ는 27살입니다.

15. $21=3\times7$, $22=2\times11$, $34=2\times17$, $39=3\times13$, $44=2^2\times11$, $45=3^2\times5$, $65=5\times13$, $76=2^2\times19$, $133=7\times19$, $153=3^2\times17$

$$22\times21\times65\times76\times153=2^3\times3^3\times5\times7\times11\times13\times17\times19$$

$$34\times39\times44\times45\times133=2^3\times3^3\times5\times7\times11\times13\times17\times19$$

그러므로 두 조의 수는 21, 22, 65, 76, 153과 34, 39, 44, 45, 133입니다.

16. 세 씨수를 x, y, z라고 하면 $xyz=7(x+y+z)$입니다.

그러면 x, y, z가운데의 한 씨수는 7입니다.

$z=7$이라고 하면 $xy=(x+y+7)$입니다.

여기서 두 수의 적과 그 두 수의 합의 차가 7이므로 그 두 수는 5보다 크지 않습니다.

그것은 $5\times5-7=18>5+5$이기때문입니다.

그리고 x, y는 서로 다른 두 씨수입니다.

(1) $x=2$, $y=3$： $2\times3\neq2+3+7$：조건에 맞지 않습니다.

(2) $x=2$, $y=5$： $2\times5\neq2+5+7$：조건에 맞지 않습니다.

(3) $x=3$, $y=5$： $3\times5=5+3+7$：조건에 맞습니다.

따라서 세 씨수는 3, 5, 7입니다.

17. $17=3+3+3+3+3+2$

이때의 적은 $3\times3\times3\times3\times3\times2=3^5\times2=486$

18. 893을 씨인수분해하면 $893=19\times47$입니다.

$(47-2)\div5=9$, $19-2=17$은 5로 완제되지 않습니다. 그러므로 학생이 모두 $47-2=45$명 있고 매 사람은 나무를 19그루 심었습니다.

제3절 최대공통약수와 최소공통배수(10－3)

1. 5460　　2. 24, 30　　3. 54, 36

4. a_1, a_2, a_3 $\cdots a_{10}$을 0이 아닌 10개 자연수라고 합니다.

$a_1+a_2+a_3+\cdots a_{10}=1001$이고 $1001=11\times7\times13=11\times91$입니다.

문제의 조건에 의하면 이 10개 수는 될수록 서로 가까이 있어야 합니다. 그리고 이 10개 수를 각각 최대공통약수로 나눈 후 그것

들의 합은 적어서 11이여야 합니다. 11은 1001의 씨수입니다.

그러므로 최대공통약수는 $7\times13=91$입니다.

5. 7송이

6. $90=2\times3^2\times5$, $105=3\times5\times7$, $126=2\times3\times3\times7$이므로 ㄴ수는 2로 완제되지 않고 ㄱ수는 2로 완제되지만 5로 완제되지 않습니다. ㄷ는 3^2으로 완제되지 않고 ㄱ는 3으로 완제됩니다. 그러므로 ㄱ수는 $2\times3^2=18$입니다.

7. 두 수의 최대공통약수와 최소공통배수의 적은 두 수의 적과 같습니다. 또한 $18\times180=3240=18\times18\times2\times5$입니다.

그리고 두 수의 차가 54이므로 그 두 수는 36과 90입니다.

8. 30과 9분의 최소공통배수는 90분인데 이것은 다음번에 종도 울리고 전등도 켜질 때까지의 간격시간입니다. 따라서 다음번에 종도 울리고 전등도 켜지는 시간은 오후 1시 30분입니다.

9. $2001=3\times23\times29$

25개 자연수의 합이 2001일 때 이 25개 자연수의 최대공통약수는 $3\times23\times29$를 완제할수 있습니다.

또한 $2001\div25=80\cdots1$이므로 최대공통약수중의 최대값은 80을 초과하지 못합니다.

먼저 최대공통약수가 $3\times29=87$일 때의 가능성을 제외할수 있습니다. 그렇지 않으면 이 25개 수의 합이 꼭 2001보다 크게 됩니다.

80보다 작고 $3\times23\times29$를 완제할수 있는 다른 수중에서 $3\times23=$ $=69$가 제일 큽니다. 그러므로 이런 최대공통약수의 최대값은 69입니다.

10. 할아버지와 명호의 나이의 차는 변하지 않습니다. 할아버지의 나이가 명호의 나이의 7배라는것은 나이의 차가 6의 배수라는것을 말합니다.

마찬가지로 이 나이의 차는 6, 5, 4, 3, 2의 공통배수입니다. 6, 5, 4, 3, 2의 공통배수는 60, 120… 인데 실제한 나이로 볼 때 60을 나이차로 볼수 있습니다.

$60\div6=10$(살), $10\times7=70$(살)

따라서 할아버지의 지금의 나이는 70살입니다.

11. 15와 35

12. (1) 임의의 련속된 3개 옹근수에는 꼭 한개가 3으로 완제됩니다. 그러므로 임의의 《미묘한 수》에는 꼭 3으로 나누어지는 수가 있습니다.

(2) 련속된 3개 옹근수의 중간수가 짝수이고 두제곱수라면 꼭 4로 완제됩니다. 만일 중간수가 홀수라면 첫번째와 세번째 수는 짝수이므로 임의의 《미묘한 수》는 꼭 4로 나누어지는 수가 있습니다.

(3) 2제곱수의 일의 자리는 가능하게 1, 4, 5, 6, 9와 0입니다.

만일 일의 자리가 5와 0이라면 중간수는 반드시 5로 완제되여야 합니다. 만일 일의 자리가 1과 6이라면 첫번째 수는 꼭 5로 완제되여야 합니다. 만일 일의 자리가 4와 9라면 세번째 수가 꼭 5로 완제되여야 합니다. 그러므로 임의의 《미묘한 수》에는 꼭 5로 나누어지는 수가 있습니다.

이로부터 《미묘한 수》는 모두 수 3과 4, 5가 있습니다. 다시말하여 수 60이 있습니다. 즉 모든 《미묘한 수》의 최대공통약수는 작아서 60입니다. $60=3\times4\times5$는 하나의 《미묘한 수》입니다. 《미묘한 수》의 최대공통약수는 많아서 60입니다. 모든 《미묘한 수》의 최대공통약수는 60보다 클수 없으며 작아서 60입니다. 즉 오직 60뿐입니다.

13. 29알

제4절 홀수와 짝수 및 그 응용(10−4)

1. 360, 검은색　　2. 짝수

3. 될수 없습니다. 그것은 홀수 5개의 합은 홀수인데 30은 짝수이기때문입니다.

4. 조건에 따라 이 몇개의 수를 쓰면 짝홀성에 의하여 처음 수

부터 홀홀짝짝짝의 규칙으로 순환하면서 나타난다는것을 알수 있습니다. 그런데 1, 9, 9, 4는 세개 홀수와 한개 짝수입니다. 따라서 우의 수의 렬에서는 네개 수 1, 9, 9, 4가 차례로 나타날수 없습니다.

5. 문제의 조건으로부터 4개 자연수가 모두 한자리수이고 제일 큰 수와 제일 작은 수가 모두 홀수라는것을 알수 있습니다. 그러므로 1, 2, 3, 5는 조건을 만족시킵니다.

네 수의 적은 $1\times2\times3\times5=30$입니다.

6. 합은 짝수입니다. 씨수중에서 제일 작은 2외에 다른것은 모두 홀수입니다. 그러므로 제일 작은 씨수는 2입니다. 그러면 7개 씨수는 17, 13, 11, 7, 5, 3, 2입니다. $c=11$

7. B, D, G

8. (1) 만일 쇠돈의 총개수가 홀수라면 반드시 처음에 쇠돈을 뒤집어야 이깁니다.

방법 : 먼저 가운데쇠돈 한개를 뒤집습니다. 그다음 후의 사람이 한개나 두개를 뒤집든 관계하지 않습니다. 먼저 뒤집는 사람이 언제나 대칭적으로 같은 수의 쇠돈을 뒤집습니다. 례하면 후에 뒤집는 사람이 왼쪽 두번째것을 뒤집으면 먼저 뒤집는 사람은 오른쪽 두번째것을 뒤집습니다. …이렇게 계속해내려가면 먼저 뒤집는 사람이 꼭 이깁니다.

(2) 만일 쇠돈 총개수가 짝수라면 여전히 처음에 쇠돈을 뒤집어야 이깁니다. 즉 먼저 중간의 쇠돈 두개를 뒤집습니다. 그다음부터는 방법 1과 같습니다.

9. $a^2=2002+b^2$이므로

$$a^2-b^2=2002$$

즉 $(a+b)(a-b)=2\times1001$

만일 a, b가 모두 홀수거나 모두 짝수라면 $(a+b)(a-b)$는 꼭 짝수×짝수입니다. 만일 a, b가 하나는 홀수이고 하나는 짝수라면 $(a+b)(a-b)$는 꼭 홀수×홀수입니다. 우에서 이야기한 두가지는 같기식 오른쪽의 짝수×홀수와 모순됩니다.

그러므로 $a^2=2002+b^2$인 자연수 a와 b를 찾을수 없습니다.

10. 30문제를 다 옳게 풀었다면 $5\times30=150$점을 얻습니다. 이것은 짝수입니다. 만일 한문제를 풀지 못했으면 4점을 받지 못하고 m개 문제를 풀지 못하면 $4m$점을 적게 얻습니다. 그러면 얻은 점수는 $150-4$ 또는 $150-4m$입니다.

여전히 짝수입니다.

만일 한문제를 틀리게 풀었다면 $3+5=8$점을 받지 못하고 n개 문제를 틀리게 풀었다면 $8n$점을 적게 얻습니다. 그러면 얻은 점수는 $150-8$ 또는 $150-8n$입니다.

여전히 짝수입니다.

그러므로 그가 몇문제를 틀리게 풀었거나 몇문제를 풀지 않았는가는 관계없이 그의 총점수는 꼭 짝수입니다.

11. 그림에서의 방향순서에 따라 조작한 후 짝홀성의 변화는 다음과 같습니다.

B C A　B C A　B C A　B C A
짝홀짝→홀짝홀→짝짝홀→홀홀짝
B C A　B C A　B C A　B C A
홀짝짝→홀홀홀→짝홀짝→짝홀홀

즉 7차례의 조작을 다 하면 원래의 짝홀성으로 돌아갑니다.

또한 $1994=7\times284+6$이므로 1994차례의 조작을 한 후의 짝홀성은 6차례를 조작한 후의 짝홀성과 같습니다. 따라서 이때의 짝홀성은 홀홀홀 즉 A, B, C 동그라미안의 수가 다 홀수로 됩니다.

12. 유치원의 어느 한반의 어린이수를 n명이라고 하면 매 아이는 $n+3$알의 사탕을 받게 되고 전체는 $n\times(n+3)$알의 사탕을 받게 됩니다. 그런데 n과 $n+3$에서는 언제나 하나가 짝수이므로 사탕총알수도 짝수로 됩니다.

제5절 나머지있는 나누기(10−5)

1. 32번째 구슬은 노란색이고 64번째 구슬은 빨간색입니다.

2. $(957+35)\div16=62$, $62-35=27$

나누는수는 62이고 나머지는 27입니다.

3. $3527\div63=55\cdots62$ 그 두자리수는 63입니다.

4. 57로 나누면 나머지가 27인 수는 141, 198, 255, 312, 369, 426, 483, 540, 597, 654, 711, 768, 825, 882, 939, 996이고 217로 나누면 나머지가 60인 세자리수는 277, 494, 711, 928입니다.

따라서 그 수는 711입니다.

5. $2205-21=2184=2\times2\times2\times3\times7\times13$,

그러므로 두자리수는 24, 26, 28, 42, 52, 56, 78, 84, 91일 수 있습니다.

6. 나누는수는 47입니다.

7. 이 수로 300, 262를 나누면 같은 나머지를 얻으므로 이 수는 $300-262=38$을 완제할수 있습니다. 마찬가지로 이 수는 $262-205=57$을 완제할수 있습니다. 그러므로 38, 57의 공통약수는 19입니다.

8. 구하려는 가장 큰 옹근수는 $2\times7\times7=98$입니다.

9. 문제의 요구로부터 $(53+89+127-23)=246$이므로 246은 이 옹근수에 완제된다는것을 알수 있습니다. 다시말하여 이 옹근수는 246의 약수입니다. 그러면 246을 씨인수분해합니다.

$$246=2\times3\times41$$

세개 나머지의 합은 23이므로 그중에는 7보다 큰 나머지가 꼭 있습니다. 이 옹근수는 7보다 큰 동시에 세개 나누어지는수중의 제일 작은 수 53보다 크지 않다는것을 알수 있습니다.

그러므로 이 옹근수는 7과 53사이에 있습니다. $2\times3\times41$의 수들

중에서 조건에 맞는것은 41뿐입니다.

10. 문제의 조건으로부터 다음과 같은것을 알수 있습니다.

나누어지는수와 나누는수의 합은 2113－17－13＝2083입니다. 다시 나머지 13을 덜면 얻어지는 수는 바로 나누는수의 (17＋1)배입니다.

즉 나누는수는 (2083－13)÷(17＋1)＝115이고 나누어지는수는 115×17＋13＝1968입니다.

11. 문제의 조건에 의하면 이런 류형의 수의 15배는 1999의 몇배에 1을 더한것과 같습니다. 다시말하여 1999의 몇배에 1을 더한 수는 3으로 완제되고 또 5로 완제됩니다.

1999×2＋1이 3으로 완제되므로

1999×5＋1, 1999×8＋1, 1999×11＋1…①

이 세 식이 모두 3으로 완제됩니다.

마찬가지로 1999×11＋1, 1999×21＋1, 1999×31＋1,

1999×6＋1, 1999×16＋1, 1999×26＋1…②

이것도 모두 5로 완제됩니다.

①식중에는 또 ②식중의 제일 작은 수 1999×11＋1이 있습니다.

그러므로 이런 류형의 수중에서 제일 작은것은

(1999×11＋1)÷15＝1466입니다.

제11장 분수

제1절 분수의 크기의 비교(11－1)

1. $\frac{3}{15}<\frac{6}{17}<\frac{10}{23}<\frac{15}{33}$

2. 제일 큰수: $\frac{20}{41}$과 $\frac{40}{82}$

제일 작은수 : $\frac{2}{5}$

3. $\frac{120}{713}$

4. 매개 분수의 분자와 분모의 위치를 바꾸면 $\frac{333}{33}=10\frac{3}{33}$, $\frac{3333}{333}=10\frac{3}{333}$, $\frac{33333}{3333}=10\frac{3}{3333}$, $\frac{333333}{33333}=10\frac{3}{33333}$을 얻습니다.

그러므로 제일 큰것은 $\frac{33333}{333333}$이고 제일 작은것은 $\frac{33}{333}$입니다.

5. $\frac{14}{19}<\frac{15}{19}$, $\frac{14}{23}<\frac{14}{19}$, $\frac{13}{23}<\frac{14}{23}$, $\frac{13}{24}<\frac{13}{23}$

그러므로 $\frac{13}{24}<\frac{13}{23}<\frac{14}{23}<\frac{14}{19}<\frac{15}{19}$

6. 이 5개 분수의 공통점에 기초하여 $\frac{1}{2}$을 기준으로 각각 비교합니다.

$$\frac{1}{2}-\frac{3}{7}=\frac{1}{14},\quad \frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18},\quad \frac{1}{2}-\frac{17}{35}=\frac{1}{70},$$

$$\frac{1}{2}-\frac{100}{201}=\frac{1}{402},\quad \frac{151}{301}-\frac{1}{2}=\frac{1}{602}$$

그러므로 제일 큰 수는 $\frac{151}{301}$입니다.

7. 분수의 기본성질에 의하여 $\frac{29}{37}=\frac{29\times43}{37\times43}<\frac{43}{A}=\frac{43\times29}{A\times29}$를 알수 있습니다.

그러므로 $37\times43>A\times29$입니다.

그러면 $A<\frac{37\times43}{29}\approx54.8$입니다.

또한 $\frac{37}{43}=\frac{37\times43}{43\times43}>\frac{43}{A}=\frac{37\times43}{A\times37}$이므로 $43\times43<A\times37$입니다.

그러면 $A>\frac{43\times43}{37}\approx49.9$입니다.

즉 $49.9<A<54.8$이므로 A는 50, 51, 52, 53, 54 다섯개의 서로 다른 자연수를 취할수 있습니다.

8. $\frac{333333}{666667}<\frac{333333}{666666}=\frac{1}{2}$, $\frac{444448}{888888}>\frac{444444}{888888}=\frac{1}{2}$,

따라서 $\frac{333333}{666667}<\frac{444448}{888888}$

9. 조건에 의하여 n은 2부터 14까지의 어떤 자연수로도 될수 있습니다.

$$2+3+4+\cdots+14=104$$

10. $\frac{5}{9}=\frac{35}{63}=\frac{70}{126}$, $\frac{4}{7}=\frac{36}{63}=\frac{72}{126}$,

$\frac{70}{126}$과 $\frac{72}{126}$사이에는 $\frac{71}{126}$이 있으므로 조건에 맞는 분수는 $\frac{71}{126}$입니다.

11. $\frac{4}{5}>\frac{7}{☆}$에서 $4☆>35$, $☆>8\frac{3}{4}$,

$\frac{7}{☆}>\frac{7}{13}$에서 $91>7☆$, $13>☆$

즉 $8\frac{3}{4}<☆<13$이고 ☆가 옹근수이므로 ☆는 9, 10, 11, 12입니다.

12. A＝B

13. $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{9}{11}$, $\frac{11}{13}\cdots$에서 세번째 수부터

$\frac{2n-1}{2n+1}$의 법칙에 맞습니다.

$1-\frac{2n-1}{2n+1}<\frac{1}{1000}$, $\frac{2}{2n+1}<\frac{1}{1000}$로부터 $2n+1>2000$을 얻습니다.

다시말하여 분모가 2001이고 분자가 $2001-2=1999$인 분수입니다. 즉 $\frac{1999}{2001}$부터 시작하여 1에서 매개 수를 던 차는 모두 $\frac{1}{1000}$보다 작습니다.

14. $(\frac{1}{24}+\frac{1}{29})\times 30$

제2절 분수의 합을 구하기(11—2)

1. (1) $\frac{1}{6}$, (2) $\frac{49}{50}$, (3) $45\frac{2}{5}$, (4) $2\frac{79}{300}$, (5) $\frac{1}{45}$,

   (6) $\frac{6}{25}$

2. (1) 주어진 식$=4\times(\frac{1}{1\times 5}+\frac{1}{5\times 9}+\frac{1}{9\times 13}+\frac{1}{13\times 17}+$

$$+\frac{1}{17\times 21})=$$

$$=4\times\frac{1}{4}\times(1-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{13}+$$

$$+\frac{1}{13}-\frac{1}{17}+\frac{1}{17}-\frac{1}{21})=$$

$$=1-\frac{1}{21}=\frac{20}{21}$$

(2) 주어진 식$=\frac{5}{7\times13\times23}-\frac{2}{7\times19\times23}-\frac{1}{1729}=$

$=\frac{3}{7\times13\times19}-\frac{1}{1729}=$

$=\frac{2}{1729}$

(3) 주어진 식$=8+(\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\frac{1}{99}+\frac{1}{143}+$

$+\frac{1}{195}+\frac{1}{255})=$

$=8+\frac{1}{2}\times〔(1-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\cdots+(\frac{1}{15}-$

$-\frac{1}{17})〕=$

$=8+\frac{1}{2}(1-\frac{1}{17})=8\frac{8}{17}$

(4) 주어진 식$=\frac{1997}{1998}+\frac{1996}{1998}+(\frac{665}{666}-\frac{664}{666})=$

$=\frac{1997}{1998}+\frac{1996}{1998}+\frac{1}{666}=$

$=\frac{1997}{1998}+\frac{1996}{1998}+\frac{3}{1998}=2$

(5) $\frac{1}{729}$

3. 주어진 식$=\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{2}{3})+(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4})+\cdots+(\frac{1}{60}+$

$+\frac{2}{60}+\frac{3}{60}+\cdots+\frac{59}{60})=$

$$=\frac{1}{2}+1+1\frac{1}{2}+2+2\frac{1}{2}+\cdots+29\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\times(1+2+3+\cdots+59)=$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{(1+59)\times 59}{2}=$$

$$=885$$

4\. 주어진 식$=(\frac{1}{1\times 2}-\frac{1}{2\times 3})\times\frac{1}{2}+(\frac{1}{2\times 3}-\frac{1}{3\times 4})\times$

$$\times\frac{1}{2}+\cdots+〔\frac{1}{(98\times 99)}-\frac{1}{99\times 100}〕\times\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{1\times 2}-\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{2\times 3}-\frac{1}{3\times 4}+$$

$$+\cdots+\frac{1}{98\times 99}-\frac{1}{99\times 100})=$$

$$=\frac{1}{2}\times(\frac{1}{1\times 2}-\frac{1}{99\times 100})=$$

$$=\frac{4949}{19800}$$

5\. 주어진 식$=(\frac{1}{2}-\frac{1}{5})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{7})+(\frac{1}{7}-\frac{1}{11})+(\frac{1}{11}-$

$$-\frac{1}{16})+(\frac{1}{16}-\frac{1}{22})+(\frac{1}{22}-\frac{1}{29})+\frac{1}{29}=$$

$$=\frac{1}{2}$$

6\. $m=\frac{1}{11}+\frac{1}{21}+\frac{1}{31}+\frac{1}{41}$, $n=\frac{1}{21}+\frac{1}{31}+\frac{1}{41}$이라고 하면

주어진 식$=m\times(n+\frac{1}{51})-(m+\frac{1}{51})\times n=$

$$=mn+\frac{m}{51}-mn-\frac{n}{51}=$$

$$=\frac{1}{51}(m-n)=$$

$$=\frac{1}{51}\times\frac{1}{11}=$$

$$=\frac{1}{561}$$

7. 2001＝1×3×23×29이므로 2001의 두 약수를 분자로 하고 두 약수의 합과 2001의 적을 공통분모로 하면 됩니다. 이 문제의 답은 유일하지 않은데 4개의 답을 아래에 소개합니다.

$a=2530=23\times(23+87)$, $b=9570=87\times(23+87)$

$a=4524=3\times29\times(23+29)$, $b=3588=3\times23\times(23+29)$

$a=2688=667\times(1+3)$, $b=8004=2001\times(1+3)$

$a=2842=29\times(29+69)$, $b=6762=69\times(29+69)$

8. (1) 주어진 식$=(1+2+3+4+5+6+7)+(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+$

$$+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8})=$$

$$=28+(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6})+(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8})=$$

$$=29\frac{201}{280}$$

(2) 주어진 식$=1+(\frac{1}{3}+\frac{1}{6})+(\frac{1}{10}+\frac{1}{15})+(\frac{1}{21}+$

$$+\frac{1}{28})+(\frac{1}{36}+\frac{1}{45})+\frac{1}{55}=$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{55}=$$

$$=1+〔(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+$$

$$+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)\Big] + \frac{1}{55} =$$

$$=1+\frac{4}{5}+\frac{1}{55}=1\frac{9}{11}$$

(3) 주어진 식 $=(1+2+4+\cdots+512)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\right.$

$$\left.+\frac{1}{1024}\right)=$$

$$=1023\frac{1023}{1024}$$

9. (1) 주어진 식 $=\Big[\left(1+\frac{1}{2}\right)\times\left(1+\frac{1}{3}\right)\times\left(1+\frac{1}{4}\right)\times\cdots\left(1+\right.$

$$\left.+\frac{1}{99}\right)\Big]\times\Big[\left(1-\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\right.$$

$$\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{99}\right)\Big] =$$

$$=\left(\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\times\cdots\times\frac{100}{99}\right)\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{88}{99}\right)=$$

$$=\frac{100}{2}\times\frac{1}{99}=$$

$$=\frac{50}{99}$$

(2) 주어진 식 $=(1+3+5+7+9+11+13+15+17)+\left(\frac{1}{6}+\right.$

$$\left.+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}\right)=$$

$$=81+\left(\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\frac{1}{5\times6}+\right.$$

$$+\frac{1}{6\times7}+\frac{1}{7\times8}+\frac{1}{8\times9}+\frac{1}{9\times10})=$$

$$=81+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-$$

$$-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+$$

$$+\frac{1}{9}-\frac{1}{10})=$$

$$=81+(\frac{1}{2}-\frac{1}{10})=$$

$$=81\frac{2}{5}$$

(3) 주어진 식$=1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{2}{3})+(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4})+$

$$+(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5})+\cdots+(\frac{1}{60}+\frac{2}{60}+$$

$$+\cdots+\frac{59}{60})=$$

$$=1+(0.5+1+1.5+2+2.5+\cdots+29.5)=$$

$$=1+\frac{(0.5+29.5)\times59}{2}=$$

$$=886$$

10. 주어진 식$=\frac{1}{3}+\frac{3}{4}+\frac{2}{5}+\frac{5}{7}+\frac{7}{8}+\frac{4+5}{4\times5}+\frac{3+7}{3\times7}+$

$$+\frac{3+8}{3\times8}+\frac{5+14}{5\times7}=$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{3}{4}+\frac{2}{5}+\frac{5}{7}+\frac{7}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+$$

$$+\frac{1}{7}+\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{7}+\frac{2}{5}=$$

$$=(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3})+(\frac{1}{4}+\frac{3}{4})+(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+$$

$$+\frac{2}{5})+(\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{5}{7})+(\frac{1}{8}+\frac{7}{8})=$$

$$=5$$

제12장 추리와 원리

제1절 론리적추리문제(12－1)

1. 매 사람에게 69개씩 나누어주었습니다.

2. C가 좋은 일을 하였습니다.

3. 만일 리지영이 기자라면 리지영, 장영호의 말은 진짜입니다. 만일 홍대위가 기자라면 장영호, 홍대위의 말이 모두 진짜입니다. 그런데 한사람만의 말이 진짜라고 하였으므로 홍대위의 말이 진짜입니다.

그러므로 장영호가 기자입니다.

4. 6개 팀이 4번씩 경기했다면 모두 12번 경기합니다. 그가운데 4번 비겼으므로 얻은 점수의 총합은 $3\times12-4=32$(점)입니다. 총점수가 세번째인 팀이 7점을 얻었으므로 앞의 3등까지 얻은 점수의 합$\geq7+8+9=24$(점)이고 그뒤 세 등수의 팀이 얻은 점수의 합≤8(점)이며 5등이 얻은 점수$<8\div2=4$(점)입니다. 즉 5등은 최고 3점을 얻습니다.

또한 5등이 얻은 점수는 6등보다 많습니다. 6등은 점수가 없습니다. 동시에 4등을 고려하면 최소로 6점을 얻습니다. 그러므로 5등은 최소로 1점을 얻습니다.

5. B팀의 꼴수가 0이고 한번 비겼기때문에 경기결과는 0：0

입니다.

C팀은 꼴수가 1이고 한번 이겼기때문에 경기결과는 1：0입니다. 그러므로 먹은 두 꼴은 B팀과의 경기에서 먹은것이 아니고 A팀과의 경기에서 먹은것입니다. 즉 C팀은 0：2로 A팀에게 졌습니다.

그러므로 C팀은 1：0으로 B팀을 이겼습니다. 그러면 B팀은 A팀과 0：0으로 비겼습니다. 그러므로 A팀은 한번 이기고 한번 비겨 모두 3점을 얻었습니다.

6. 마지막에 세층의 책꽂이에 있는 책의 권수가 같으므로 384÷3＝128(권)입니다.

세번째는 아래층의 책을 꺼내 웃층과 중간층에 놓았으므로 놓기전에 웃층과 중간층에 있어야 할 책의 권수는 각각 128의 절반 즉 64권이여야 하고 아래층에는 책이 128＋64＋64＝256(권) 있어야 합니다.

두번째는 중간층의 책을 꺼내 웃층과 아래층에 놓았으므로 놓기전에 웃층에는 64권의 절반 즉 32권이 있어야 하고 아래층에는 256권의 절반 즉 128권이 있어야 하며 중간층에는 64＋128＋32＝ ＝224(권) 있어야 합니다.

따라서 첫번째에 책을 꺼내기 전에 아래층에는 책이 64권 있었고 중간층에는 책이 112권 있었으며 웃층에는 32＋64＋112＝208(권) 있었다는것을 알수 있습니다.

즉 웃층에는 책이 208권 있었습니다.

7. ②와 ③으로부터 C가 반드시 가야 한다는것을 알수 있습니다. ④로부터 A가 가야 하며 이로부터 B가 가지 못한다는것을 알수 있습니다. 또한 B가 가지 못한다는것과 ③으로부터 D도 가지 못한다는것을 알수 있습니다. D가 못간다는것과 ⑤로부터 E도 가지 못한다는것을 알수 있습니다.

그러므로 A와 C학생이 갈수 있습니다.

8. 여섯번 경기의 승부가 끝났을 때 총점수는 18점으로 제일 높습니다. 여섯번 경기가 모두 비겼을 때 총점수가 12점으로 제일 낮습니다. 12와 18사이에 련속된 4개 자연수의 합으로 나눌수 있

는것은 18=3+4+5+6과 14=2+3+4+5입니다. 여기서 3, 4, 5, 6은 문제의 조건에 맞지 않습니다. 총점수가 14점이라면 이때 4번 경기는 비기고 2번 경기는 승부가 갈라집니다. 1등부터 4등까지 차례로 5, 4, 3, 2점을 얻습니다. 그러므로 1등은 한번 이기고 두번 비겼으며 2등은 한번 이기고 한번 비기며 한번 집니다. 3등은 3번 비겼습니다. 4등은 두번 비기고 한번 집니다. 3등과 4등은 이긴것이 없으므로 2등은 1등에게 졌습니다.

즉 1등에게 진 축구팀의 총점수는 4점입니다.

9. 매 사람이 얻은 점수를 비교합니다. 3번과 5번은 점수가 같고 1, 2, 3, 4번은 차례로 점수가 1점씩 많아집니다. 만일 1번이 1점이라면 1, 2, 3, 4번은 모두 합하여 1+2+3+4=10(점)입니다. 그러나 실지는 26점입니다.

(26−10)÷4=4점. 그러면 1, 2, 3, 4는 5, 6, 7, 8점입니다. 5번은 역시 7점입니다.

오영이는 5+6+7+8=33(점)을 맞았습니다.

10. 모든 사람은 9번 경기합니다. 1등과 2등은 한번도 지지 않았습니다. 그러나 점수는 다릅니다. 그러므로 1등은 8.5점보다 많지 않고 2등은 8점보다 많지 않습니다. 마지막 4명사이에서 경기가 6번 진행되였으므로 마지막 4명의 점수의 합은 적어서 6점입니다.

그러므로 4등은 적어서 6점을 맞았습니다. 또 1등과 2등의 총점수는 3등보다 10점 많습니다. 즉 3등은 많아서 6.5점을 맞습니다.

따라서 3등은 6.5점이고 4등은 6점입니다.

11. 총체적으로 볼 때 이렇게 바친 100개수의 마지막 두자리의 수자가 모두 다르다면 이 100개수의 마지막 두자리수자의 합은 00+01+02+…+99=4950입니다. 즉 마지막 두자리수의 합의 마지막 두자리수자는 50입니다.

100명 선수의 번호천에 있는 마지막 두자리수자의 합이 50이므로 매 사람의 등수도 모두 다릅니다.(동시에 결승선에 도착한 선수가 없기때문입니다.)

그러므로 100등하는 선수의 마지막 두자리수자의 합은 50입니다. 그런데 바친 100개수의 마지막 두자리수자의 합은 50+50이므로 마지막 두자리수자가 00입니다. 이 두가지는 모순됩니다.

이것은 이렇게 바친 100개 수자의 마지막 두자리수자는 모두 다를수 없다는것을 말합니다.

12. B, C를 선택하여 비교합니다. 두곳이 다르고 두사람이 얻은 점수는 20점 차이가 납니다.

이 두 문제를 B는 맞게 대답하고 C는 틀리게 대답하고 A도 틀리게 대답했습니다. 그런데 A가 맨 마지막에 얻은 점수는 B보다 20점 많습니다. A와 B는 다른 4문제에 대해서는 A가 맞고 B가 틀렸습니다.

다시 B, D를 비교해봅시다. 두명은 세곳이 다릅니다. D는 2번과 6번을 맞게 풀고 5번을 틀리게 풀었습니다. 그러므로 60점을 얻었습니다.

제2절 서랍원리(12-2)

1. 자연수 11개를 다음과 같이 6개 조로 나눕니다.

10, 19； 11, 18； 12, 17； 13, 16； 14, 15；20 이제 7개 수를 취하면 서랍원리에 의하여 두 수는 꼭같은 조에서 취하게 됩니다.

2. 수 20개를 다음과 같이 11개 조로 나눕니다. 1, 12； 2, 13； 3, 14； …；9, 20； 10； 11.

그중 처음 9개 조에서의 두 수의 차는 11입니다. 임의로 12개 수를 취하면 그중에는 반드시 한조에서 취한 두 수가 있게 됩니다. 따라서 두 수의 차는 11입니다.

3. 한 선수가 경기를 전혀 하지 않았다면 제일 많이 경기를 진행한 선수는 18차례 하였고 어떤 선수가 경기를 19번 진행하였

다면 (즉 그가 매개 선수들과 다 경기를 진행하였다면) 경기를 제일 적게 한 사람은 한번입니다. 즉 어떠하든지 모두 19가지 경우뿐입니다. 그러면 서랍원리에 의하여 그중에는 경기차수가 같은 두사람이 꼭 있게 됩니다.

4. 12개 학교를 서랍으로 보고 등수에 당선된 87명 학생이 한 학교에서 왔으면 대응하는 서랍에 넣습니다.

그러면 $87=12\times7+3$이므로 서랍원리에 의하여 적어도 8명 학생은 한학교에서 왔습니다.

5. 1m는 100㎝입니다. 이 선분을 6토막으로 똑같게 나누면 한토막의 길이는 $\frac{100}{6}$㎝<17㎝로 됩니다.

이제 이 선분우에서 점 7개를 임의로 정하면 서랍원리에 의하여 두 점은 반드시 같은 토막안에 있게 되며 그 두 점사이의 거리는 17㎝보다 작게 됩니다.

6. 2×9의 직4각형에는 9개의 렬이 있는데 매개 렬에는 작은 네모칸이 2개씩 있습니다.

그것들을 빨간색, 흰색의 2가지 색갈로 칠하면 네가지 서로 다른 방식을 얻을수 있는데 이것을 4개 서랍으로 봅니다.

그러면 $9=4\times2+1$이므로 서랍원리에 의하여 적어도 3개 렬의 색칠방식은 같게 됩니다.

7. 매 렬에 작은 네모칸이 3개 있고 매개 작은 네모칸에 빨간색, 노란색, 흰색 세가지 색칠을 하므로 매개 렬의 색칠방식은 $3\times3\times3=27$가지입니다.

그러면 서랍원리에 의하여 적어도 28렬이여야 두개 렬의 색칠방식이 완전히 같게 됩니다. 따라서 n의 최소값은 28입니다.

8. 10명

9. 11대

10. 매 사람이 2개씩 가지는 방법은 모두 6가지가 있습니다. 다시말하면 서랍이 6개 있습니다.

① 사과, 배 ② 사과, 귤 ③ 배, 귤 ④ 사과, 사과 ⑤ 배, 배

⑥ 귤, 귤

그러므로 적어서 7명이 가져야 두사람이 가지는 과일이 같은 경우가 나타납니다.

11. 주패의 모든 꽃의 장수는 1～13입니다.

가장 적어서 $13+1=14$장 뽑아야 2장의 수자가 같습니다.

12. 학생들이 참가하는 체육활동의 종류에는 ① 롱구, ② 축구, ③ 탁구 ④ 롱구, 축구 ⑤ 롱구, 탁구 ⑥ 축구, 탁구 ⑦ 롱구, 축구, 탁구 모두 7가지 가능성이 있습니다. 즉 7개 서랍이 있습니다.

$$165=7\times23+4$$

그러므로 같은 체육활동에 참가하는 학생은 적어서 24명입니다.

13. 1, 2, 3… 50에서 7로 나누면 나머지가 1인 수는 1, 8, 15, 22, 29, 36, 43, 50입니다.

7로 나누면 나머지가 2인 수：2, 9, 16, 23, 30, 37, 44

7로 나누면 나머지가 3인 수：3, 10, 17, 24, 31, 38, 45

7로 나누면 나머지가 1, 2, 3인 수는 모두 22개입니다.

이 22개 수에서 임의의 두개 수의 합은 모두 7로 완제되지 않습니다. 또 7의 배수에 하나를 더한 수는 모두 23개입니다. 이 23개 수의 임의의 두개 수의 합도 7로 완제되지 않습니다. 다른 방법으로 취하는 수도 모두 이보다 더 많은 수를 뽑을수 없습니다.

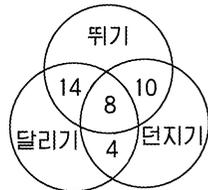
제3절 포함배제원리(12－3)

1. 그림에서와 같이 $22+22-36=8$(명)

$$22-8-10=4\text{(명)}$$

뛰기와 던지기 두 경기에만 참가한 학생은 4명입니다.

2.
$24\times3-48-6\times2=12$(㎠)

3. $15+20+25-2\times2-40=16$(명)

$$40-16-2=22(\text{명})$$

두문제만 맞게 푼 학생은 16명이고 한문제만 맞게 푼 학생은 22명입니다.

4. 15명

5. 571개

6. 55명

7. a를 첫번째 문제는 맞게 풀고 두번째 문제를 틀리게 푼 학생수를 표시하고 b를 두번째 문제는 맞게 풀고 첫번째 문제를 틀리게 푼 학생수를 표시하며 c를 두문제 다 맞게 푼 학생수, d는 두문제 다 틀리게 푼 학생수라고 합시다.

그러면 $a+b+c+d=40$ …①

$a+c=30$ …②

$a+d=12$ …③

$c=20$ …④

②와 ④로부터 $a=10$ …⑤

③, ⑤로부터 $d=2$ …⑥

①, ④, ⑤, ⑥으로부터 $b=8$

두번째 문제를 맞게 풀고 첫번째 문제를 틀리게 푼 학생은 8명이고 두문제를 모두 틀리게 푼 학생은 2명입니다.

8. $385=5\times7\times11$이므로 $1\sim384$에는 5로 완제되는 수가 76개 있고 7로 완제되는 수는 54개, 11로 완제되는 수는 34개, 5와 7로 완제되는 수는 10개, 5와 11로 완제되는 수는 6개, 7과 11로 완제되는 수는 4개 있습니다. 5, 7, 11로 동시에 완제되는 수는 없습니다. 그러므로 5 또는 7, 11로 완제되는 수는 모두 $76+54+34-$ $-(10+6+4)=144$(개) 있습니다.

5 또는 7, 11로 완제되지 않는 수는 $384-144=240$(개) 있습니다.

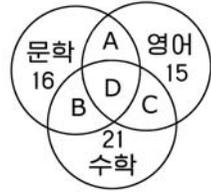
즉 385를 분모로 하는 가장 간단한 참분수는 240개입니다.

동시에 이 240개 참분수는 쌍을 지어 나타납니다. 례하면 $\frac{4}{385}$와 $\frac{381}{385}$입니다. 이것들의 합은 1입니다.

따라서 240개 참분수의 합은 120입니다.

9. 그림을 보시오. $A+B+D=52-16=36$

$A+C+D=61-15=46$

$B+C+D=63-21=42$

세 식을 더하면

$$2\times(A+B+C+D)+D=124$$

또 $A+B+C+D=110-(16+15+21)=58$

그러면 $D=124-58\times2=8$

즉 세개 소조에 모두 참가한 사람은 8명입니다.

10. 경연에 참가한 학생수 $28+23+20=71$

이런 71명을 될수록 많이 중복되게 합니다. $71\div2=35\cdots1$

그러므로 두가지 학과목경연에 참가한 학생은 많아서 35명입니다.

제13장 직6면체와 바른6면체

제1절 겉면적의 계산(13－1)

1. $4\times4+(1\times1+2\times2+4\times4)\times4=100(\text{m}^2)$
2. $6^2\times2+(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2)\times4=436(\text{dm}^2)$
3. $4^2\times2+(1^2+1\times2+1\times3+1\times4)\times4=72(\text{m}^2)$
4. 웃면과 아래면의 면적 : $2^2\times9\times2=72(\text{cm}^2)$

   앞뒤면적 : $2^2\times7\times2=56(\text{cm}^2)$

   옆면적 : $2^2\times9\times2=72(\text{cm}^2)$

   (옆면적을 계산할 때 맨 아래단 앞부분의 우묵하게 들어간 부분의 두 측면을 주의해야 합니다.)

   겉면적 : $72+56+72=200(\text{cm}^2)$
5. 이 문제에서 바른6면체의 한변의 길이는 4㎝이고 6개 면의 중

심에서 변의 길이가 1㎝인 바른6면체를 파내였으므로 중심부분은 뚫려있습니다.

원래의 바른6면체의 겉면적 : $4^2\times6=96$(㎠)

6개 면에서 한변의 길이가 1㎝인 바른6면체를 파낸 다음

불어난 면적 : $1^2\times4\times6=24$(㎠)

놀이감의 겉면적 : $96+24=120$(㎠)

6. $10^2\times(3\times2)=600$(㎠)

7. ① 먼저 한변의 길이가 1㎝인 작은 바른6면체로 잘랐을 때 모든 작은 바른6면체의 겉면적을 구합니다.

이 도형을 8개의 《귀》와 12개의 《들보》 즉 20개 부분으로 나눕니다. 여기서 매개 《귀》에는 작은 바른6면체가 8개 있고 8개 《귀》에는 모두 $8\times8=64$(개)의 바른6면체가 있습니다. 그리고 매개 《들보》에는 작은 바른6면체가 1개씩 있는데 12개 《들보》에는 모두 $1\times12=12$(개)의 작은 바른6면체가 있습니다.

그러므로 작은 바른6면체가 모두 $64+12=76$(개) 있고 그것들의 겉면적은 $1^2\times6\times76=456$(㎠)입니다.

② 다음 노란색칠을 한 면적의 합을 구합니다.

8개 《귀》에서 노란 색칠을 한 면의 개수는

$(4\times3+3^2)\times8=168$(개)입니다.

12개 《들보》에서 노란 색칠을 한 면의 개수는

$4\times12=48$(개)입니다.

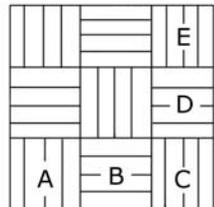
노란 색칠을 한 면적의 총합은 $1^2\times(168+48)=216$(㎠)

③ 마지막으로 노란 색칠을 하지 않은 면적의 합을 구합니다.

그 합은 $456-216=240$(㎠)입니다.

8. 600　　9. 650　　10. 생략함

11. 그림을 보시오. 이 벽돌무지의 매개 층은 모두 9개 부분으로 나뉘였습니다. 1층(제일 웃층)의 벽돌에는 모두 회칠을 하였습니다. 이런 벽돌은 $4\times3\times3=36$(장)입니다.

2층부터는 A, B, C, D, E 이 다섯개 부분

의 벽돌에만 회칠을 하였습니다. 매 층의 벽돌수는 같습니다.

모두 $(1+4)\times2+4=14$(장)에 회칠하였습니다.

이 벽돌무지에서 회칠한 벽돌은 모두 $36+14\times5=36+70=106$(장)입니다.

12. 두가지 붙이는 방법이 있습니다. 직6면체를 길이가 10×3㎝, 너비가 6㎝, 높이가 4㎝인 직6면체로 붙였을 때 겉면적이 제일 큽니다.

길이가 10㎝, 너비가 6㎝, 높이가 4×3㎝인 직6면체로 붙였을 때 겉면적이 제일 작습니다.

두가지 면적의 차는

$$(30\times6+30\times4+6\times4)\times2-(10\times12+10\times6+6\times12)\times2=$$
$$=648-504=144(\text{㎠})$$

13. 8개의 작은 바른6면체를 붙여서 큰 바른6면체를 만든 후 매 작은 바른6면체의 로출된 세 수자는 1, 2, 3입니다. 그러므로 큰 바른6면체겉면의 모든 수자의 합은 $(1+2+3)\times8=48$입니다.

만일 큰 바른6면체의 매개 면의 수자의 합이 련속된 6개 자연수라면 반드시 3개의 홀수와 3개의 짝수가 있어야 합니다.

그리고 이 6개 수의 합은 홀수입니다. 그러므로 이렇게 붙이는 방법은 없습니다.

14. 바른6면체의 한변의 길이를 a㎝라고 하면

$$4a^2=144,\ a=6(\text{㎝})\text{를 얻습니다.}$$

직6면체의 겉면적은 $6\times6\times2+6(n\times6)\times4=3096$

$$n=21$$

15. 직6면체의 길이, 너비, 높이를 각각 a, b, h($a>b>h$ 라고 할수 있습니다.)라고 하면 이것들은 정의 옹근수이고 $a\times b\times h=$ $=455=5\times7\times13$입니다.

$$\text{즉 } a\times b\times h=5\times7\times13 \quad \cdots\cdots①$$

변을 따라 뜯어낸 작은 바른6면체의 개수 $455-371=84$(개)

매 길이에서 뜯어낸 작은 바른6면체의 개수가 $(a-1)$개이면 너비에서 뜯어낸 작은 바른6면체는 $(b-1)$개이고 높이에서 뜯어낸

작은 바른6면체는 $(h-2)$개입니다.

그러면 다음과 같은 관계식이 섭니다.

$$4\times(a-1+b-1+h-2)=84$$

$$\text{즉 } a+b+h=25 \quad \cdots\cdots②$$

a, b, h는 정의 옹근수이므로 ①과 ②로부터 $a=13$, $b=7$, $h=5$라는것을 알수 있습니다.

결면적계산

방법1 : 그림을 보시오. 변을 따라 작은 바른6면체를 뜯어낸 후의 다면체의 겉면은 두개 부분으로 되여있습니다.

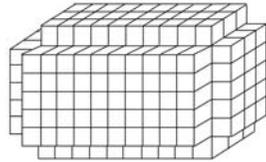
첫째 부분 : 밖으로 드러난 6개의 평면입니다.

그 총면적은

$$2\times(11\times5+11\times3+5\times3)=206$$

뜯어낸 부분 총면적은

$$(11+3+5)\times8=152$$

$$206+152=358$$

방법2: 변을 따라 작은 바른6면체를 뜯어낸 후의 다면체의 겉면적은 원래 직6면체겉면적의 8개 꼭두점들에서 작은 바른6면체를 빼버린 3개 측면의 면적과 같습니다.

그러므로 $2\times(13\times7+13\times5+7\times5)-3\times8=358$

제2절 체적계산(13-2)

1. 물면의 최고높이 :

$$(5\times6\times2+4\times5\times2)\div(4\times5)=5(\text{dm})$$

물의 체적 : $4\times5\times5=100(\ell)$

2. 체적 : $30\times20\times1=600(\text{cm}^3)$

질량 : $7.8\times(30\times20\times1)=4680(\text{g})=4.68(\text{kg})$

3. $24\div[2\times(4-1)]\times(6\times4)=96(\text{cm}^3)$

4. $(8\div2\div4)^2\times2=2$(㎥)

5. 90　　6. 1029900　　7. 20

8. 접은 후의 용적은 $20\times20\times5=$

$=2000$(㎤)

9. 웃면의 네개의 변의 길이가 12인 작은 바른6면체는 큰 바른6면체의 밑면에 변의 길이가 $12+12-20=4$인 바른4각형을 형성합니다.

이로부터 그것들의 밑면이 4×4인 바른4각형이고 높이가 12인 직6면체라는것을 알수 있습니다.

이와 같이 아래면의 4개의 작은 바른6면체의 공통부분은 밑면이 6×6인 바른4각형이고 높이가 13인 직6면체입니다.

이 두 직6면체의 밑면의 중심은 각각 큰 직6면체의 중심과 같습니다.

그러므로 4×4인 바른4각형을 수직으로 아래면에 투영하면 아래의 6×6인 바른4각형에 겹칩니다.

두면의 공통부분 즉 8개의 작은 바른6면체의 공통부분은 밑면이 4×4인 바른4각형이고 높이가 $12+13-20=5$인 직6면체입니다.

그 체적은 $4\times4\times5=80$입니다.

10. (1) $10\times10\times10\div(25\times20)=2$(㎝)

(2) 물면의 높이를 x㎝라고 하면

$$(25\times20-10\times10)\times x=25\times20\times8$$

이것을 풀면 $x=10$입니다.

(3) 물의 깊이가 5㎝일 때 쇠덩이를 넣은 다음의 물의 높이를 x㎝라고 하면

$$(25\times20-10\times10)\times x=25\times20\times5$$

$$x=6.25$$

11. 점 F와 점 N은 일치되고 점 G와 점 S가 일치됩니다.

12. 6토막을 내려면 $6-1=5$(번) 잘라야 합니다.

한번 자를 때마다 자름면이 2개 불어납니다. 그러면 120㎠는

2×5=10(개) 자름면의 면적입니다.

$$12\text{m}=1200\text{cm}$$

$$1200\times(120\div10)=14400(\text{cm}^3)$$

13. 물통의 체적 : $5\times3\times4=60(\text{dm}^3)$

물통안에 남은 물의 체적 : $60-4\times2\times4=28(\text{dm}^3)$

원래 물의 체적 : $28\div(1-\frac{1}{3})=42(\text{dm}^3)$

원래 물의 체적과 물통그릇의 체적의 비는

$42:60=7:10$입니다.

제14장 분수의 간단한 계산

제1절 넉셈계산법칙과 성질의 리용(14−1)

1. 주어진 식 $=3.51\times49+3.51\times51+(50-1)\times(50+1)=$

$=3.51\times(49+51)+50\times50-1\times1=$

$=351+2500-1=$

$=2850$

2. 주어진 식 $=(1.1+0.9)+(1.91+0.09)+\cdots+(1.\underbrace{99\cdots991}_{100개}+$

$+0.\underbrace{00\cdots009}_{100개})-0.\underbrace{99\cdots99}_{101개}=$

$=2\times101-0.\underbrace{99\cdots99}_{101개}=$

$=201.\underbrace{00\cdots001}_{100개}$

3. 주어진 식 $=(100-1)\times43+(100-2)\times42+(100-3)\times41=$

$=100\times(43+42+41)-(43+2\times42+3\times41)=$
$=12350$

4. 주어진 식 $=0.7\times(1\frac{4}{9}+\frac{5}{9})+(2\frac{3}{4}+\frac{1}{4})\times15=$

$=0.7\times2+3\times15=$
$=46.4$

5. 주어진 식 $=\frac{17}{77}\times(10+9+8+\cdots+2+1)=$

$=\frac{17}{77}\times55=12\frac{1}{7}$

6. 1) 주어진 식 $=1.1\times(1+3+5+7+9)+1.01\times(11+13+$
$+15+17+19)=$
$=1.1\times25+1.01\times75=103.25$

2) 주어진 식 $=(2\frac{1}{2003}+7\frac{2002}{2003})\times9\frac{5}{8}\div96\frac{1}{4}=$

$=10\times\frac{77}{8}\times\frac{4}{385}=$

$=1$

3) 주어진 식 $=790329\times(0.8542-0.2865+0.4323)=$
$=790329\times1=790329$

7. 1) 주어진 식 $=(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{4})\times(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(1+\frac{1}{3}+$

$+\frac{1}{4})\times\frac{1}{5}-(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{4})\times(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})-$

$-\frac{1}{5}\times(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})=$

$=(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4})\times\frac{1}{5}=\frac{1}{5}$

2) 주어진 식 $=(76-53)\times\frac{1}{23}-(76-23)\times\frac{1}{53}+$

$+(23+53)\times\frac{1}{76}=$

$=23\times\frac{1}{23}-53\times\frac{1}{53}+76\times\frac{1}{76}=$

$=1$

3) 주어진 식$=4\times(\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9})+(\frac{1}{19}-\frac{1}{17})\times(\frac{1}{7}+$

$+\frac{1}{8}+\frac{1}{9})-4\times(\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9})+(\frac{1}{7}+$

$+\frac{1}{8}+\frac{1}{9})\times(\frac{1}{17}-\frac{1}{19})$

$=4\times\frac{1}{8}\times 2=1$

8. 1) 0

2) 주어진 식$=(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16})-\frac{1}{16}+$

$+(\frac{1}{31}+\frac{1}{62}+\frac{1}{124}+\frac{1}{248}+\frac{1}{496}+$

$+\frac{1}{496})-\frac{1}{496}=$

$=1-\frac{1}{16}+\frac{2}{31}-\frac{1}{496}=$

$=1-\frac{31-32+1}{496}=1$

3) 주어진 식$=(50+\frac{5}{3})\times\frac{3}{5}+(70+\frac{7}{4})\times\frac{4}{7}+(90+$

$+\frac{9}{5})\times\frac{5}{9}=$

$=50\times\frac{3}{5}+\frac{5}{3}\times\frac{3}{5}+70\times\frac{4}{7}+\frac{7}{4}\times\frac{4}{7}+$

$+90\times\frac{5}{9}+\frac{9}{5}\times\frac{5}{9}=$

$=30+1+40+1+50+1=$

$=123$

4) 주어진 식$=23.5$

9. 주어진 식$=(200.5\times20.05\times2005-3\times20.05\times2005\times0.5)+$

$+3\times200.5\times0.25-0.125=$

$=20.05\times2005\times199+200.5\times0.75-0.125=$

$=8000000$

10. 주어진 식$=2005\times\frac{3}{8}-\frac{3}{8}\times1949+\frac{3}{8}\times24=$

$=(2005-1949+24)\times\frac{3}{8}=$

$=30$

11. 주어진 식$=(80+\frac{80}{19})\times1.375+(100+\frac{100}{19})\times0.9=$

$=110+\frac{110}{19}+90+\frac{90}{19}=210\frac{10}{19}$

12. 1) 주어진 식$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{2004}{2005}=$

$=\frac{1}{2005}$

2) 주어진 식$=1+2+3\cdots+100=$

$=(1+100)\times100\div2=5050$

3) 주어진 식$=\frac{76}{23}-\frac{76}{53}+\frac{23}{53}-\frac{23}{76}-\frac{53}{23}+\frac{53}{76}=$

$=(\frac{76}{23}-\frac{53}{23})+(\frac{53}{76}-\frac{23}{76})-(\frac{76}{53}-$

$-\frac{23}{53})=$

$$=1+\frac{30}{76}-1=\frac{15}{38}$$

4) 주어진 식 $=(60-\frac{1}{2})\times\frac{2}{3}+(80-\frac{2}{3})\times\frac{3}{4}+(100-$

$$-\frac{3}{4})\times\frac{4}{5}+(120-\frac{4}{5})\times\frac{5}{6}=$$

$$=40-\frac{1}{3}+60-\frac{1}{2}+80-\frac{3}{5}+100-\frac{2}{3}=$$

$$=277\frac{9}{10}$$

5) $\frac{1}{11}+\frac{3\times3+5}{3\times5}+\frac{2\times7+3}{3\times7}+\frac{4\times5+2\times7}{5\times7}+\frac{3\times7+2\times8}{7\times8}+$

$$+\frac{4\times8+5\times11}{8\times11}=$$

$$=\frac{1}{11}+\frac{3}{5}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{7}+\frac{4}{7}+\frac{2}{5}+\frac{3}{8}+\frac{2}{7}+$$

$$+\frac{4}{11}+\frac{5}{8}=$$

$$=4\frac{5}{11}$$

6) 주어진 식 $=\frac{3367}{5050}$

7) 주어진 식 $=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{9}{4}\times\frac{16}{5}\times\frac{25}{6}\times\frac{36}{7}\times\frac{49}{8}\times$

$$\times\frac{64}{9}\times\frac{81}{10}=$$

$$=36288$$

제2절 약분(14－2)

1. 1) 분자$=2004^2+3\times2000+3\times4=2004^2+3\times2004=$
$=2004\times(2004+3)=2004\times2007$

분모$=2004\times(2004^2-3^2)=2004\times(2004+3)\times$
$\times(2004-3)=$
$=2004\times2007\times2001$

그러므로

주어진 식$=\dfrac{2004\times2007}{2004\times2007\times2001}=\dfrac{1}{2001}$

2) 주어진 식$=\dfrac{\dfrac{2}{3}+\dfrac{13}{12}}{4+\dfrac{32}{7}}=\dfrac{21}{12}\times\dfrac{7}{60}=\dfrac{49}{240}$

3) 주어진 식$=\dfrac{2004+(2004-1)\times2005}{2004\times2005-1}=$

$=\dfrac{2004+2004\times2005-2005}{2004\times2005-1}=$

$=\dfrac{2004\times2005-1}{2004\times2005-1}=1$

4) 주어진 식$=$

$=\dfrac{2004\times(1+10001+100010001+1000100010001)}{2005\times(1+10001+100010001+1000100010001)}=$

$=\dfrac{2004}{2005}$

2. 1) 주어진 식$=\dfrac{1+\dfrac{1}{1234567890}-1+\dfrac{1}{1234567891}}{\dfrac{1}{1234567890}+\dfrac{1}{1234567891}}=1$

2) 주어진 식$=\dfrac{2003\times794+205}{2003\times794+794-589}-\dfrac{5}{17}=$

$=1-\dfrac{5}{17}=$

$=\dfrac{12}{17}$

3) 주어진 식=

$$=\frac{1+\frac{2}{3}+2\frac{3}{4}+\cdots+2000\frac{2001}{2002}+2001\frac{2002}{2003}}{(1\frac{2}{3}+2\frac{3}{4}+\cdots+2000\frac{2001}{2002}+2001\frac{2002}{2003})\times2}=$$

$=\dfrac{1}{2}$

4) 주어진 식$=\dfrac{(1\times2\times3)\times(1+2^3+\cdots+100^3)}{(2\times3\times4)\times(1+2^3+\cdots+100^3)}=$

$=\dfrac{1\times2\times3}{2\times3\times4}=\dfrac{1}{4}$

3. 1) 주어진 식$=\dfrac{1994+(1994-1)\times1995}{1994\times1995-1}+$

$+\dfrac{1995+(1995-1)\times1996}{1995\times1996-1}+\dfrac{1996+(1996-1)\times1997}{1996\times1997-1}=$

$=\dfrac{1994\times1995-1}{1994\times1995-1}+\dfrac{1995\times1996-1}{1995\times1996-1}+\dfrac{1996\times1997-1}{1996\times1997-1}=$

$=1+1+1=3$

2) 주어진 식$=1+\dfrac{6\times7\times8\times9\times10\times11}{1\times2\times3\times4\times5\times6}=1+462=463$

3) 주어진 식$=\dfrac{12-11\frac{1}{3}}{\frac{7}{4}+\frac{2}{3}}\times3\dfrac{5}{8}=$

$$=1$$

4) 주어진 식$=\dfrac{\frac{8}{3}\times\frac{25}{24}}{\frac{13}{4}\div\frac{25}{24}}=\dfrac{25}{9}\div\dfrac{6}{5}=2\dfrac{17}{54}$

5) 주어진 식$=\dfrac{2005+2004\times(2005+1)}{2005^2+(2005+1)^2-3}=$

$$=\frac{2005+2004\times(2005+1)}{2005^2+2005^2+2\times2005+1-3}=$$

$$=\frac{2005^2+2004}{2\times(2005^2+2004)}=$$

$$=\frac{1}{2}$$

6) 주어진 식$=\dfrac{100020000+99999999+200020002}{(10001+10000)(10001-10000)}=$

$$=\frac{400040001}{20001}=$$

$$=20001$$

7) 주어진 식$=\dfrac{(1985+1999)\times8\div2}{(1986+2000)\times8\div2}=$

$$=\frac{1985+1999}{1986+2000}=$$

$$=\frac{1992}{1993}$$

8) 주어진 식$=\dfrac{\frac{260}{31}\times\frac{161}{374}\times\frac{297}{598}}{42\times\frac{30}{31}}=$

$$=\frac{260}{31}\times\frac{161}{374}\times\frac{297}{598}\times\frac{1}{42}\times\frac{31}{30}=$$

$$=\frac{3}{68}$$

9) $\frac{8}{27}$

제3절 마디가르기(14−3)

1. 1) 주어진 식$=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{6\times7}+\frac{1}{7}=$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}$$

$$+\frac{1}{7}=$$

$$=1$$

2) 주어진 식$=(\frac{1}{3}+\frac{5}{14})+(\frac{2}{7}+\frac{3}{8})+(\frac{1}{8}+\frac{4}{9})+(\frac{2}{9}+$

$$+\frac{7}{11})+(\frac{4}{11}+\frac{5}{13})+(\frac{8}{13}+\frac{5}{14})=$$

$$=4\frac{1}{2}$$

3) 주어진 식$=(1+\frac{1}{3})-(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})-(\frac{1}{4}+\frac{1}{5})-\cdots+$

$$+(\frac{1}{8}+\frac{1}{9})=$$

$$=1+\frac{1}{9}=$$

$$=1\frac{1}{9}$$

4) 주어진 식$=\frac{1}{3}+\frac{3}{4}+\frac{2}{5}+\frac{5}{7}+\frac{7}{8}+\frac{4+5}{4\times 5}+\frac{3+7}{3\times 7}+$

$+\frac{3+8}{3\times 8}+\frac{2\times 7+5}{5\times 7}=$

$=\frac{1}{3}+\frac{3}{4}+\frac{2}{5}+\frac{5}{7}+\frac{7}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+$

$+\frac{1}{7}+\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{2}{5}+\frac{1}{7}=5$

2. 1) 주어진 식$=4\times(1-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{76}-$

$-\frac{1}{81})\times\frac{1}{5}=$

$=4\times\frac{80}{81}\times\frac{1}{5}=\frac{64}{81}$

2) 주어진 식$=\frac{1}{4}\times(1-\frac{1}{5})+\frac{1}{4}\times(\frac{1}{5}-\frac{1}{9})+\cdots+\frac{1}{4}\times$

$\times(\frac{1}{17}-\frac{1}{21})=$

$=\frac{1}{4}\times(1-\frac{1}{21})=\frac{5}{21}$

3) 주어진 식$=42\times\frac{1}{4}\times(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+$

$+\frac{1}{42})=$

$=42\times\frac{1}{4}\times(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\cdots+$

$+\frac{1}{6}-\frac{1}{7})=$

$=42\times\frac{1}{4}\times(1-\frac{1}{7})=$

$=9$

4) 주어진 식$=(1+3+5+\cdots+17)+(\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{90})=$

$=\frac{(1+17)\times 9}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+$

$+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}=$

$=81\frac{2}{5}$

3. 1) 주어진 식$=\frac{1}{3}\times〔(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10})+$

$+(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{11})+(\frac{1}{3}-$

$-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{12})〕=$

$=\frac{1}{3}\times(1-\frac{1}{10}+\frac{1}{2}-\frac{1}{11}+\frac{1}{3}-\frac{1}{12})=$

$=\frac{343}{660}$

2) 주어진 식$=(\frac{1}{1\times 2\times 3}-\frac{1}{2\times 3\times 4}+\frac{1}{2\times 3\times 4}-$

$-\frac{1}{3\times 4\times 5}+\cdots+\frac{1}{11\times 12\times 13}-\frac{1}{12\times 13\times 14})\times$

$\times\frac{1}{3}=$

$=(\frac{1}{6}-\frac{1}{2184})\times\frac{1}{3}=$

$=\frac{121}{2184}$

3) 주어진 식$=3\times\frac{1}{5}(\frac{1}{1\times 2\times 3\times 4\times 5}-\frac{1}{2\times 3\times 4\times 5\times 6}+$

$$+\frac{1}{2\times3\times4\times5\times6}-\frac{1}{3\times4\times5\times6\times7}+\cdots+$$

$$+\frac{1}{11\times12\times13\times14\times15}-\frac{1}{12\times13\times14\times15\times16})=$$

$$=\frac{3}{5}\times(\frac{1}{120}-\frac{1}{524160})=\frac{4367}{873600}$$

4) 주어진 식 $=\frac{5}{11}+\frac{6}{11}+\frac{9}{17}+\frac{3}{17}=$

$$=1\frac{12}{17}$$

5) $9\frac{362879}{362880}$

제15장 분수에 관한 응용문제

제1절 응용문제의 기본류형(15－1)

1. $30\div〔\frac{2}{3}+(1-\frac{2}{3})\times\frac{1}{4}〕=40$(페지)

2. $(52+4)\times\frac{3}{4+3}-4=20$(명)

3. 1반학생의 $\frac{4}{5}$=1반학생의 $\frac{1}{5}$+2반학생수

   그러므로 $\frac{3}{5}$배입니다.

4. $1\frac{1}{5}\div(\frac{8}{15}-\frac{1}{2})=36$(㎞)

5. $120\times(1-\frac{1}{4})\div\frac{3}{5}\div\frac{3}{5}=$

$=120\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{3}\times\frac{5}{3}=250(t)$

6. ㄱ : 90t, ㄴ : 126t
7. 금 : 570g, 은 : 200g
8. 명식 : 150개, 철수 210개
9. 10명
10. ㄱ : 25원, ㄴ : 10원
11. 60개

제2절 단위 1의 전환(15－2)

1. $\frac{17}{23}$
2. $5\div(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6})=60$(명)
3. 2000(권)
4. 9(알) 5. 576(t)
6. $\frac{2}{5}\div\frac{1}{4}=8:5$, $120\div(8-5)\times(8+5)=520$(권)
7. $\frac{3}{4}\div 2=\frac{3}{8}$, $50\times 8=400$(명), $50\times 3=150$(명)
8. 셋째수 $\frac{65}{99}\div(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3})=\frac{5}{11}$

둘째수 $\frac{5}{11}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{33}$

첫째수 $\frac{5}{33}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{99}$

9. $\frac{2}{3}\div\frac{3}{4}=8:9$, $102\times\frac{9}{8+9}=54$(권), $54-24=30$(권)

10. $60\div(1-\frac{3}{5}-\frac{1}{3+1})=400$(명)

제3절 일에 관한 문제(15−3)

1. $(1-\frac{1}{8}\times 3)\div(\frac{1}{8}+\frac{1}{12})=3$(일)

2. $\frac{5}{6}\div 6=\frac{5}{36}$, $\frac{1}{3}:\frac{1}{2}=2:3$, $\frac{5}{36}\times\frac{3}{2+3}=\frac{1}{12}$

3. $\frac{1}{40}:\frac{1}{24}=3:5$ $750\div(\frac{5}{3+5}-\frac{1}{2})=6000$(m)

4. $1\div〔(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})\div 2〕=24$(일)

5. $\frac{1}{3}:\frac{1}{4}=4:3$, $24\div(\frac{4}{4+3}-\frac{3}{4+3})=168$(개)

6. $(1-\frac{2}{5}-\frac{1}{24}\times 12)\div(16-12)=\frac{1}{40}$

$$3\div〔\frac{1}{40}-(\frac{1}{24}-\frac{1}{40})〕=360(개)$$

7. $\frac{1}{4}-\frac{1}{3+4}=\frac{3}{28}$ $24\div\frac{3}{28}=224$(㎞)

8. $3\div(\frac{1}{15}-\frac{1}{24})=3\div\frac{3}{120}=120$(t)

9. 8시간 10. ㄱ작업반 12일, ㄴ작업반 8일

11. 16시간 12. 252개 13. 32일 14. $10\frac{1}{4}$시간

15. ㄴ작업반

제4절 일에 관한 문제의 전형적인 례(15－4)

1. $(5-3)\div(\frac{7}{8}-\frac{9}{40}\times3)=10$(일)

2. $(1-\frac{1}{40}\times35)\div(\frac{1}{30}-\frac{1}{40})=15$(일)

3. 9시간

4. $1\div(\frac{1}{12}+\frac{1}{18})=7\frac{1}{5}$(시간)

$1-(\frac{1}{12}+\frac{1}{18})\times7=\frac{1}{36}$

$\frac{1}{36}\div\frac{1}{12}+7\times2=14\frac{1}{3}$(시간)

5. $\frac{1}{6}\times3\div\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$

$[1-(\frac{1}{8}+\frac{1}{6})\times2]\div\frac{1}{8}=3\frac{1}{3}$(일)

6. $\frac{1}{3}\div6=\frac{1}{18}$, $(1-\frac{1}{3})\times\frac{1}{4}\div2=\frac{1}{12}$

$(1-\frac{1}{3})\times(1-\frac{1}{4})\div5=\frac{1}{10}$

$180\times[(\frac{1}{10}-\frac{1}{18})\times(2+5)]=56$ …ㄷ

$180\times[(\frac{1}{10}-\frac{1}{12})\times(6+5)]=33$ …ㄱ

$180-56-33=91$ …ㄴ

7. $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{7}{60}$

$\frac{1}{6}+\frac{7}{60}\times5=\frac{3}{4}$

$(1-\frac{3}{4})\div\frac{1}{3}+20=20\frac{3}{4}$(시간)

8. $\frac{1}{3}\div5+\frac{1}{3}\div4.5+\frac{1}{3}\div4=\frac{121}{540}$

$\frac{1}{2}\div5+\frac{1}{2}\div4=\frac{9}{40}$

$\frac{30}{3600}\div(\frac{9}{40}-\frac{121}{540})=9$(㎞)

제16장 비

제1절 비의 의미와 성질(16−1)

1. $1\div(25-1)=1:24$

2. $(1+\frac{1}{3}):(1\div\frac{5}{4})=\frac{4}{3}:\frac{4}{5}=5:3$

3. $19:18$

4. $(1\div\frac{1}{6}):(1\div\frac{1}{4})=6:4=3:2$

5. $(2\times3\times6):(2\times5\times2):(3\times6\times5)=36:20:90$

$90\div90=1$(㎤), $1\times(36+20)=56$(㎤)

6. 세병의것을 각각 20몫으로 똑같게 나눕니다. 그러면 알콜과 물의 비는 12：8, 15：5, 16：4로 됩니다.

$$(12+15+16):(8+5+4)=43:17$$

7. (5+4)와 5+7의 최소공통배수는 36입니다. 총수량을 36몫으로 꼭같게 나눕니다.

$$5:4=20:16,\ \ 5:7=15:21$$

$$45\div5\times20=180(\text{kg})$$

8. $180\times\dfrac{5}{1+4+5}=90^\circ$, 직각3각형

9. 명일이가 걷는 거리를 1이라고 하면 순녀가 걷는 거리는 $\dfrac{6}{5}$입니다. 명일이가 걸리는 시간을 1로 하면 순녀가 걸리는 시간은 $\dfrac{7}{6}$입니다. 속도의 비는 $\dfrac{6}{5}\div\dfrac{7}{6}=36:35$

10. 8 : 7

11. 남학생$\times\dfrac{5}{6}=$녀학생$\times\dfrac{2}{3}$

남학생을 1이라고 하면 녀학생은 $1\times\dfrac{5}{6}\div\dfrac{2}{3}=\dfrac{5}{4}$

$$1:\frac{5}{4}=4:5$$

12. 직4각형의 길이를 5라고 하면 너비는 1입니다.

바른4각형의 변의 길이 : $(5+1)\times2\div4=3$

면적의 비 : $(5\times1):(3\times3)=5:9$

13. 첫번에 넘쳐난 물의 량을 1몫이라고 하면 두번째에 넘쳐난 물의 량은 4몫입니다. 그러면 중형뽈의 체적은 4+1=5(몫)입니다.

세번째에 넘쳐난 물의 량이 3몫이면 대, 소 두개 뽈의 체적의 합은 5+3=8(몫)입니다.

소형뽈의 체적이 1몫이면 대형뽈의 체적은 8−1=7(몫)입니다.

그러므로 대, 중, 소 세개 뽈의 체적비는 7 : 5 : 1입니다.

14. 원과 바른4각형의 면적비 : $(1\div\frac{1}{6}):(1\div\frac{1}{5})=6:5$

바른4각형과 3각형의 면적비 : $(1\div\frac{1}{4}):(1\div\frac{1}{9})=4:9$

원, 바른4각형, 3각형의 면적비 :

$$(6\times4):(5\times4):(9\times5)=24:20:45$$

제2절 비례분배문제(16－2)

1. 합격되지 못한 남학생과 녀학생수 5:2를 리용하면 풀수 있습니다.

   88명

2. ㄴ수가 49입니다.

   144

3. $10\div(\frac{3}{3+2}-\frac{7}{7+8})\times\frac{3}{3+2}=45$(명)

4. 첫째 통: 10, 둘째 통: 17.5, 셋째 통: 17.5

5. 큰병: $2.7\times\frac{3}{3+2}\div(1-\frac{1}{4})=2.16$(kg)

작은병: $2.7-2.16=0.54$(kg)

6. 수련: $200\times\frac{9}{40}=45$(개)

   백일홍: $45\times\frac{25}{3}=375$(개)

   국화: $375\times\frac{31}{5}=2325$(개)

7. 원래 물면우의 부분을 x㎝라고 하면 긴 말뚝의 물면우의 부

분은 10x㎝입니다.

$$\frac{10x+20}{x+20}=\frac{5}{2}$$

$$x=4$$

8. (3×4)∶(2×5)=6∶5

큰 광주리: $330\times\frac{6}{11}=180$(원)

작은 광주리: $330\times\frac{5}{11}=150$(원)

9. (13+11)×0.5=12

12÷(13−11)=6(시간)

10. ㄱ, ㄴ, ㄷ 세사람이 쓴 돈은 13∶12∶8입니다.

(13−8)∶(12−8)=5∶4

(5+4)÷3=3(묶)

4−3=1(묶)

$3\times\frac{2}{1+2}=2$(원)

3−2=1(원)

ㄱ는 2원, ㄴ는 1원을 가져야 합니다.

11. 수량은 2∶3∶1이고 가격은

$$\frac{3.6\times2+2.8\times3+2.1\times1}{2+3+1}=2.95(\text{원})$$

12. $315\times\frac{4}{1+4}=252$(t)

$252\div\frac{7}{3+7}=360$(t)

360−315=45(t)

13. 24㎠

14. 자동차∶말∶사람=2∶9∶21

돈을 받은 비는 $(3\times2):(2\times9):(1\times21)=2:6:7$

자동차: $315\times\frac{2}{2+6+7}\div3=14$(대)

말: $14\div2\times9=63$(마리)

사람: $14\div2\times21=147$(명)

15. $(1-\frac{2}{5})\times\frac{7}{7+5}=\frac{7}{20}$

$$(20+20)\div(1-\frac{9}{10})\times(1+\frac{9}{10})=760(\text{kg})$$

$$760\times(\frac{2}{5}-\frac{7}{20})=38(\text{kg})$$

제17장 비례식

제1절 비례식의 의미와 기본성질(17－1)

1. $\frac{1997+x}{2000+x}=\frac{2000}{2001}$ $\quad x=4003$

2. t시간이 걸린다면

$$1-\frac{t}{4}=(1-\frac{t}{3})\times2$$

$$t=2\frac{2}{5}$$

3. $(23-8)\div(8-5)=5$

$\frac{5}{8}$를 약분하기 전에는 $\frac{5\times5}{8\times5}=\frac{25}{40}$

$25-8=17$

4. $(1-\frac{1}{4}):(1-\frac{1}{3})=9:8$

ㄱ통: $340\times\frac{9}{9+8}=180$(t)

ㄴ통: $340-180=160$(t)

5. 가격을 x원이라고 하면 A상품은 원래 $7x$원이고 B상품은 원래 $3x$원입니다.

$$\frac{7x+700}{3x+700}=\frac{7}{4}\quad x=300$$

$300\times7=2100$(원)

$300\times3=900$(원)

6. $(64-32-20)\div(4-3)\times3=36$(명)

ㄱ직장: $36+64=100$(명)

ㄴ직장: $100-20=80$(명)

7. x시간후 서로 만났다면

$$\frac{3.2}{x}=\frac{x}{5}\quad x=4$$

ㄱ차: $4+3.2=7.2$(시간)

ㄴ차: $4+5=9$(시간)

8. 원래 창고에 있은 화물의 매몫을 xt이라면 ㄱ창고에는 $6x$t 있었고 ㄴ창고에는 $5x$t 있었습니다.

$$\frac{6x+180}{5x+30}=\frac{18}{11}\quad x=60$$

$60\times(6+5)=660$(t)

9. 기능공이 가공하지 못한 부속품을 x개라고 하고 견습공이 가공하지 못한 부속품을 y개라고 하면

$$x+\frac{1}{4}y=y+\frac{1}{5}x$$

$$x:y=15:16$$

10. $ㄱ\times\frac{1}{3}=ㄴ\times\frac{4}{15}$ $ㄱ:ㄴ=\frac{4}{15}:\frac{1}{3}=4:5$

$ㄴ\times\frac{1}{5}=ㄷ\times\frac{1}{6}$ $ㄴ:ㄷ=\frac{1}{6}:\frac{1}{5}=5:6$

ㄱ:ㄴ:ㄷ=4:5:6

$60\div(6-4)\times(4+5+6)=450$

11. $(1-80\%):(1-\frac{5}{6})=6:5$

$15400\div(6+5)\times6=8400$(자)

12. 방철의 바둑알수:원일의 바둑알수$=\frac{1}{5}:\frac{1}{4}=4:5$

방철: $360\times\frac{4}{4+5}=160$(알)

원일: $360-160=200$(알)

13. $1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$

$0.5\div(\frac{5}{4}-1)=2$(㎞)

$(2\times2.5)\div0.5=10$(시간)

$(2-0.5)\times10=15$(㎞)

14. $1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$

$36\div(4-3)\times(4+3)=252$(그루)

15. $ㄱ:ㄴ=\frac{4}{7}:\frac{2}{3}=6:7$

$ㄴ:ㄷ=\frac{4}{7}:\frac{2}{3}=6:7$

ㄱ:ㄴ:ㄷ=36:42:49

$13\div(49-36)\times42=42$(분)

제2절 정비례와 반비례(17－2)

1. $(1+\frac{2}{3})\div(1-\frac{2}{3})=5$(시간)

2. $30\times\frac{4}{5}=24$(㎞), 1㎞를 왕복하는데 걸리는 시간은

$$\frac{1}{30}+\frac{1}{24}=3/40(\text{시간})$$

$6\div\frac{3}{40}=80$(㎞)

3. $16\div2=8$(㎞) $16\div10=1.6$(시간)
$4-1.6=2.4$(시간)
$8\div(2-1.6)=20$(㎞)
$AB=20\times2.4=48$(㎞)

4. $100\div(\frac{4}{3}-1)=300$(㎏)
$18\div300=0.06$(원)

5. $5\div(1-\frac{8}{9})=45$(㎞)
$1\div(1-\frac{3}{4})=4$(시간)
$45\times4=180$(㎞)

6. ㄱ의 속도를 x㎞/h라고 하고 ㄴ의 속도를 y㎞/h로 한다면 ㄴ가 ㄱ를 따라잡는데 걸리는 시간은 $\frac{3}{y-x}$입니다. 그러면

$2\times\frac{3}{y-x}\times x=15-3$

$$x:y=2:3$$

7. $72 \div (\frac{3}{3+4} - \frac{3}{3+4} \times \frac{4}{5}) = 315$(㎞)

8. $(\frac{1}{6} + \frac{5}{30} - \frac{5}{40}) \div [(1-\frac{3}{4}) \div 30 - \frac{1}{4} \div 40] = 100$(㎞)

9. 840m

10. ㄱ, ㄴ가 c점에서 만나는데 t시간 걸렸다고 하면

$$t : \frac{1}{6} = \frac{3}{2} : t$$

$$t^2 = \frac{1}{6} \times \frac{3}{2} = (\frac{1}{2})^2$$

$$t = \frac{1}{2}$$

출발시간은 11시 30분입니다.

11. A, B 두곳이 x㎞ 떨어져있다면

AE:EB=60:80=3:4로부터

$AE = \frac{3}{7}x \quad EB = \frac{4}{7}x$

$(x + \frac{4}{7}x) \div 60 = (x + \frac{3}{7}x) \div 40 + 14$

$x = 1680$

12. $80\% = \frac{4}{5} \quad 5 \times (1 - 20\%) = 4$

$4 \times (1 + 20\%) = 4.8$

$20 \div (5 - 4.8) \times (5 + 4) = 900$(㎞)

13. $(10+40) : 40 = 5 : 4$

$(10+20+60) : 60 = 3 : 2$

$(2 \times 5) : (4 \times 3) : (5 \times 3) = 10 : 12 : 15$

ㄱ가 출발하여 x분후에 ㄴ를 따라잡는다면

$$\frac{20+x}{x} = \frac{12}{10}$$

x=100분=1시간 40분

14. 공장으로부터 A도시까지의 거리를 S㎞라고 하고 갈 때의 ㄱ차의 속도를 v_1, ㄴ차의 속도를 v_2라고 하면

$$\frac{S}{v_1}=\frac{S-20}{v_2} \quad \cdots(1)$$

$$\frac{S}{2v_1}=\frac{20}{v_2}+\frac{\frac{2}{3}S}{2v_2} \quad \cdots(2)$$

$$S-20=40+\frac{2}{3}S$$

(1)과 (2)로부터 S=180

제3절 도형에 관한 비례문제(17-3)

1. AC를 련결합니다.

$$S_{\triangle ADC}=3S_{\triangle ABC}=\frac{3}{4}S_{제형ABCD}=\frac{3}{4}\times 24=18(㎠)$$

$$\frac{1}{2}\times 18=9(㎠)$$

2. ㄱ, ㄴ의 높이 h_1과 h_2를 긋습니다.

$$h_1:h_2=\frac{8}{2}:\frac{6}{3}=2:1$$

$$\frac{(2+3)(h_1+h_2)}{2}:\frac{2h_1+3h_2}{2}=\frac{5\times(2+1)}{2}:\frac{2\times 2+3\times 1}{2}=$$

$=15:7$

$(8+6)\div 7\times 15=30(㎠)$ $30-(8+6)=16(㎠)$

3. AF를 련결합니다.

$$S_{\triangle BEF}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABF}=\frac{1}{3}\times\frac{4}{9}S_{\triangle ABC}=\frac{4}{27}S_{\triangle ABC}$$

$$S_{4각형 AEFC}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle BEF}=\left(1-\frac{4}{27}\right)S_{\triangle ABC}=\frac{23}{27}S_{\triangle ABC}$$

$$\frac{4}{27}:\frac{23}{27}=4:23$$

4. $AD=\frac{1}{4}AC=24(㎝)$, $CE=\frac{2}{3}BC=64(㎝)$

$CF=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}(96-24)=36(㎝)$

$CE+CF=64+36=100(㎝)$

5. $S_{\triangle ACE}=2S_{\triangle ABC}=12(㎠)$

$S_{\triangle AED}=\frac{1}{2}(6+12)=9(㎠)$

$S_{4각형 ACED}=12+9=21(㎠)$

6. $S_{\triangle A_1BD}=1\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$

$S_{\triangle A_1BA}=\frac{1}{3}S_{\triangle A_1BD}=\frac{1}{8}$

$S_{\triangle B_1DC_1}=\frac{1}{2}S_{\triangle B_1DC}=\frac{1}{2}S_{\triangle BB_1D}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{8}$

그러므로 $S_{\triangle B_1DC_1}=S_{\triangle A_1B_1D}$

그러므로 $B_1O=C_1O$

그러므로 $S_{\triangle A_1B_1C_1}=\frac{1}{8}$

7. 65

8. 60. 9. 2㎝, 14㎝. 10. 3:14

11. 3각형 GBE의 면적을 x㎠라고 하면

BE:EC=2:3

$S_4=S_{\triangle ABE}-x=\frac{2}{2+3}S_{\triangle ABC}-x=\frac{18}{5}-x$

AF:FC=1:2이므로

$$S_1 = S_{\triangle ABE} - S_4 = \frac{1}{1+2} S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ABE} =$$

$$= 3 - \left(\frac{18}{5} - x\right) = x - \frac{3}{5}$$

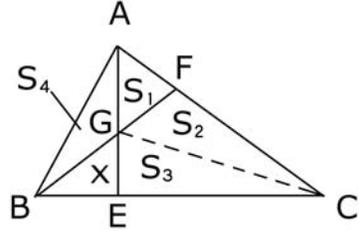
$S_2 = 2S_1$

BE∶EC=2∶3이므로

$$S_1 + S_2 + S_3 = \frac{3}{2+3} S_{\triangle ABC}$$

$$3S_1 - S_3 = \frac{3}{5} \times 9$$

$$3\left(x - \frac{3}{5}\right) + \frac{3}{2} x = \frac{27}{5}$$

$$x = \frac{8}{5}$$

12. $\frac{12}{12+36} = \frac{1}{4}$, $\frac{24}{24+48} = \frac{1}{3}$

$$\frac{1}{12} \times (12+24+36+48) \div 2 = (1+2+3+4) \div 2 = 5(\text{㎠})$$

13. △AFD와 △FEB의 맞은각이 같고 AD=2BE이므로

AF=2FE

$S_{\triangle ABF} = 1$, AF=2FE이므로

$$S_{\square ABCD} = 4S_{\triangle ABE} = 4 \times \frac{3}{2} S_{\triangle ABF} = 4 \times \frac{3}{2} \times 1 = 6(\text{㎠})$$

14. AF//ED, FE//DC이므로 $\frac{EH}{AG} = \frac{DC}{FE} = \frac{DC}{BD}$

E에서 DC에 내려그은 수직선의 밑점을 H라고 합니다.

$$EH = AG \times \frac{DC}{BD} = 8 \times \frac{10}{15} =$$

$$= \frac{16}{3}(\text{㎠})$$이므로

$$S_{\square BDEF}=BD\times EF=15\times\frac{16}{3}=80(\text{cm}^2)$$

15. AD=BD, AE=2EC이므로

$$S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC},\quad S_{\triangle BEC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$$

또는 $S_{\triangle ADC}-S_{\triangle BEC}=5$이므로

$$\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}-\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}=5$$

$$S_{\triangle ABC}=5\div(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})=30(\text{cm}^2)$$

16. BO를 련결합니다.

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

17. $AH=\frac{1}{4}AE$, BE=EC이므로

3각형 HFG에서 FG를 밑변으로 하는 높이는 AD의

$1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{7}{8}$입니다.

$FG=\frac{1}{3}CD$이므로

$$S_{\triangle HFG}=\frac{7}{8}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}S_{\square ABCD}=\frac{7}{8}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 60=8.75(\text{cm}^2)$$

18. ED를 련결합니다.

$S_{\triangle BEO}:S_{\triangle ABO}=5:8$이므로

EO:AO=5:8

$8x+5x=8x+8$

$$x=\frac{8}{5}$$

$2(8x+5x)=26x=41.6(\text{cm}^2)$

제18장 원둘레의 길이와 면적

제1절 원둘레의 길이(18－1)

1. 15.7　2. 30.84

3. 개가 끈을 팽팽하게 당기면서 시계바늘이 도는 방향으로 뛰여간 그림은 다음과 같습니다.

개가 뛰여간 거리는 세 호의 길이입니다.

$3.14\times 20\times 2\times \frac{1}{4}+3.14(20-6)\times 2\times \frac{1}{4}+3.14\times$

$\times(20-6\times 2)\times 2\times \frac{1}{4}=$

$=3.14\times 88\times \frac{1}{4}=$

$=69.08$(㎝)

4. 그림으로부터 매번 세번 굴러갈 때 A점이 지나간 궤도는 중심각이 120° 인 호 두개입니다.

호의 길이: $3.14\times 3\times 2\times \frac{120}{360}=6.28$(㎝)

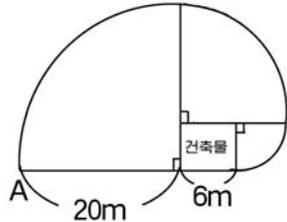
호의 총개수: $30\div 3\times 2=20$(개)

A점이 지나간 총거리

$$6.28\times 20=125.6(㎝)$$

5. $6+7+8+3.14\times 1\times 2=27.28$(㎝)

6. $(6371+343)\times 2\times 3.14\times 10=421639.2$(㎞)

7. 원의 중심이 지나는 길에는 반경이 1㎝인 원의 둘레의 길

이의 $\frac{1}{4}$이 4개 있습니다. 9㎝인 선분이 8개 있고 8㎝인 선분이 4개 있습니다. 총길이는

$$1\times2\times\pi+9\times8+8\times4=110.28(㎝)$$

8. 원의 반경을 R㎝라고 합니다. 반경이 1㎝ 늘어나면 원의 반경은 (R+1)㎝입니다.

늘어난 원둘레의 길이는 $2\pi(R+1)$

원래 원둘레의 길이는 $2\pi R$

늘어난것: $2\pi(R+1)-2\pi R=2\pi$(㎝)

제2절 원의 면적(18−2)

1. 3.27($\frac{1}{2}\pi r^2=2r+\pi r$)

2. 98(제시: 도형을 베서 붙이는 방법으로 길이가 14이고 너비가 7인 직4각형을 만듭니다.)

3. 56.52(제시: 작은 반원을 평행이동시켜 두 원의 중심이 겹치게 합니다. 다시 아래에 대칭되게 반원을 만들어 중심이 같은 두 원을 만듭니다.)

4. 72. (제시: 매개 작은 원중의 빗선을 친 부분을 붙여서 변의 길이가 $3\sqrt{2}$인 바른4각형을 만듭니다.)

5. 28

6. 39.25 제시: 이동하고 보충하여 빗선을 친 부분을 두 원사이의 고리의 절반과 같게 합니다. 큰 원의 반경의 두제곱은 $5^2+5^2=50$입니다. 구하려는 면적 $(50-5^2)\times\pi\div2=39.25$(㎠)

7. 9.12

8. △ABC에서 빗선을 치지 않은 부분의 면적은

$1^2\times\pi\div2=1.57$(㎠)입니다. 빗선친 부분의 면적은

$3\times4\div2-1.57=4.43$(㎠)입니다.

9. $40^2\times\pi-30^2\times\pi\div12=4788.5$(㎠)

10. △ABC가 직각3각형이므로

$$AC^2+BC^2=AB^2$$

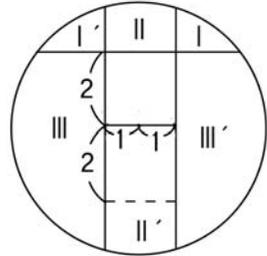
$$\left(\frac{AC}{2}\right)^2+\left(\frac{BC}{2}\right)^2=\left(\frac{AB}{2}\right)^2$$

웃식은 AC, BC를 직경으로 하는 원의 면적의 합은 AB를 직경으로 하는 원의 면적과 같다는것을 보여줍니다. 그러므로 반원 AEC와 반원 BFC의 면적의 합은 반원 ACB의 면적과 같습니다. 이로부터 빗선친 부분의 면적의 합은 △ACB의 면적과 같다는것을 알수 있습니다. △ACB의 면적을 제일 크게 하려면 오직 AC=BC여야 합니다.

그러므로 C점은 AB를 직경으로 하는 반원둘레의 중심에 있어야 합니다.

11. 빗선친 부분 DEC를 회전시키면 보다 간단히 될수 있습니다.

$$4^2-3.14\times4^2\times\frac{1}{4}=3.44(㎠)$$

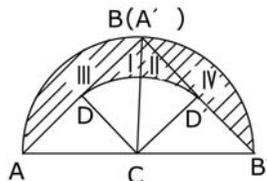
12. 그림에서 빗선치지 않은 부분을 Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ 세개 부분으로 나누었습니다. 이 세 부분은 Ⅰ′, Ⅱ′, Ⅲ′ 세 부분과 대응하여 같습니다. 남은 부분은 원의 중심을 포함한 길이가 4이고 너비가 2인 직4각형입니다.

그 면적은 $4\times2=8$(㎠)입니다.

13. $R^2=7.5^2+r^2$

고리의 면적

$(R^2-r^2)\pi=7.5^2\times3.14=176.625$(㎠)

14. C로부터 AB에 수직선을 그으면 AB와 D에서 사귑니다.

AB가 C점과 떨어진 거리가 제일 가까운 점은 D이고 제일 먼 점은 A와 B점입니다. 그러므로 △ACB가 C점을 중심으로 시계바

늘과 같은 방향으로 90° 회전할 때 A점은 A'점까지 돌아가 B점과 겹치고 B점도 B'점까지 돌아갑니다. AB가 그리는 도형은 그림에서 빗선친 부분입니다. Ⅲ, Ⅳ 두 부분의 면적의 합은 반경이 1인 반원에서 $\triangle ABB'$의 면적을 던것과 같습니다. 즉 $(\frac{\pi}{2}-1)$입니다.

Ⅰ, Ⅱ 두 부분의 면적은 바른4각형 $CDBD'$에서 부채형 CDD'의 면적을 던것과 같습니다. 바른4각형 $CDBD'$와 3각형 ABC의 면적이 같으므로 $CD^2=\frac{1}{2}$입니다. 부채형 CDD'의 면적은 $CD^2\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}$입니다. Ⅰ, Ⅱ 두 부분의 면적의 합은 $(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8})$입니다.

빗선친 부분의 면적:

$$(\frac{\pi}{2}-1)+(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8})=\frac{3}{8}\pi-\frac{1}{2}=0.6775\approx 0.68$$

15. 먼저 세가지 관을 속에 넣어 수량을 줄입니다. 한대의 A형관안에 7대의 C형관을 넣을수 있거나 1대의 B형관과 3대의 C형관을 넣을수 있습니다.

170대의 A형관에 170×7=1190(대)의 C형관을 넣을수 있습니다. 남은 30대 A형관에 30대 B형관과 90대의 C형관을 넣습니다.

그러면 200대의 A형관에 30대의 B형관과 1280대의 C형관을 넣을수 있습니다.

1대의 B형관에 2대의 C형관을 넣을수 있으므로 남은 2250−1280=970(대) C형관을 남은 520−30=490(대)의 B형관에 넣을수 있습니다. 이제는 두 짐덕대에 200대 A형관과 490대의 B형관을 놓을수 있는가 하는것입니다.

200대의 A형관을 웃덕대에 놓습니다. 20대, 19대, … 이렇게 10층까지 놓고 남은 5대를 11층에 놓습니다.

총높이는 $15+15\times10\times0.866=144.9$(㎝)$<1.5$m입니다. 490대의 B형관은 아래덕대에 놓습니다. 한층에 30대, 29대, … 이렇게 16층까지 놓고 남은 18대는 17층에 놓습니다. 류사하게 계산한 총높이는 $10+10\times16\times0.866=148.56$(㎝)$<1.5$m

제19장 퍼센트응용문제

제1절 일반류형(19－1)

1. $1\times(1-10\%)\times(1-20\%)=72\%$
2. ㄷ수를 1로 합니다.

그러면 ㄴ수는 $(1-20\%)$이고 ㄱ수는 $(1-20)\times(1+20)=96\%$입니다.

3. $\frac{1}{8}\div\frac{1}{10}-1=25\%$
4. 쌀이 원래 xt 있었다면

$$(x-25)\times40\%+\frac{1}{2}x+25=x$$

$$x=150$$

5. $1\div19.5=\frac{2}{39}$, $\frac{2}{39}\times(1+30\%)\times(1+25\%)\times(1+20\%)=\frac{1}{10}$

$1\div\frac{1}{10}=10$(시간)

6. x명 뽑는다고 하면

$$\frac{600\times5\%+x}{600}=\frac{400\times20\%-x}{400}$$

$$\frac{30+x}{600}=\frac{80-x}{400}$$

$$x=36$$

7. 65%　8. 15㎞　9. 20kg　10. 47%

제2절 리윤문제(19-2)

1. $(960+832)\div(1-80\%)-960=8000$(원)
2. $(1+20\%)\div(1-20\%)-1=150\%-1=50\%$
3. $(44+7.4\times5)\div(7.4-6.5)=90$(컬레)
4. 축구공이 x개 있다고 하면
   $x\times20+20\times(1+20\%)\times(x+15)=2400+820$
   $x=65$
   롱구공의 개수: $65+15=80$(개)
5. 책이 x권 있다고 하면
   $$18\times\frac{2}{5}x+(18-10)\times(1-\frac{2}{5}x)=3000$$
   $x=250$

6. 2　7. 300　8. 200원

제3절 농도문제(19-3)

1. $200\times15\%\div10\%-200=100$(g)
2. $210-210\times2.5\%\div3.5\%=60$(g)
3. $(80\times80\%+40\times40\%)\div(80+40)\times100\%=66.7\%$
4. $(100-40)\times80\%\div100=48\%$
   $(100-40)\times48\%\div100=28.8\%$
   $(100-40)\times28.8\%\div100=17.28\%$

5. ㄷ술이 $x$kg 있었다고 하면 ㄴ술은 $(x+3)$kg 있고 ㄱ술은 $(11-x-x-3)$kg 있습니다.

즉 $(8-2x)$kg 있습니다.

$(8-2x)\times 40\%-(x+3)\times 36\%+x\times 35\%=11\times 38.5\%$

$x=0.5$

$8-2x=8-1=7$(kg)

6. $300\times 8\%=24$(g)

$120\times 12.5\%=15$(g)

매개 용기에 물을 xg 넣는다면

$$\frac{24}{300+x}=\frac{15}{120+x}$$

$$x=180$$

7. $60\div 7=8\cdots 4\quad 8\times 5+2=42$(초)

$(4\times 20\%\times 60+6\times 15\%\times 60)\div(4\times 60+6\times 60+10\times 42)=$

$=(48+54)\div 1020=10\%$

8. $\frac{(150+450)\times 8.2\%-150\times 4\%}{450}=9.6\%$

9. 12ℓ

10. 20%의 소금물을 xg이라고 한다면

5%의 소금물은 $(600-x)$g입니다.

$20\%x+(600-x)\times 5\%=600\times 15\%$

$x=400$

5%의 소금물: $600-x=200$(g)

제20장 원기둥과 원뿔

1. $1:\pi$

2. 마지막에 늘군 국수의 직경이 원래 직경의 $\frac{1}{64}$이면 그 면적은 $\frac{1}{64^2}$이고 총길이는 $1.6\times 64\times 64$입니다.

3. 원뿔체적은 $\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\times(\frac{27}{2})^2\times3.14\times27=$

$=\frac{\pi}{12}\times27^3$입니다.

바른4각기둥의 체적은 27^3이고 둘레의 비는 $\frac{\pi}{12}$입니다.

4. ㄱ용기의 밑변의 반경이 R이면 ㄱ용기의 물면의 반경은 $\frac{1}{2}R$ 입니다. 원뿔의 높이를 h라고 하면

ㄱ용기의 웃부분의 빈 용적(즉 ㄴ용기중의 물의 체적)은

$$\frac{1}{3}\pi(\frac{1}{2}R)^2\times\frac{h}{2}=\frac{1}{24}\pi R^2h$$

ㄱ용기의 용적은 $\frac{1}{3}\pi R^2h$

ㄱ용기의 물의 체적은 $\frac{1}{3}\pi R^2h-\frac{1}{24}\pi R^2h=\frac{7}{24}\pi R^2h$

ㄱ, ㄴ용기의 물의 체적을 비교하면

$$\frac{7}{24}\pi R^2h=\frac{1}{24}\pi R^2h=7$$

5. 6.25, 2449

6. $V=\frac{1}{3}sh$이므로 피라미드의 체적은

$$\frac{1}{3}\times230.4^2\times146.7=2595815.424(㎥)$$

재료의 총무게: 2700×2595815.424=7008701644.8(㎏)

7. 두 용기의 높이를 h라고 하면

$$\frac{V_{원추}}{V_{원기둥}}=\frac{\frac{1}{3}\pi\cdot9^2\cdot h}{\pi\cdot6^2\cdot h}=\frac{3}{4}$$

$3\div(\frac{6}{7}-\frac{3}{4})=28$(㎝)

8. $1^2\times\pi\times12+\frac{4}{3}\times1^3\times\pi=13\frac{1}{3}\times3.1416=41.888(㎥)$

9. 물의 체적: $\pi\times5^2\times10=250\pi(㎤)$

물의 현재 밑면적: $\pi\times5^2-\pi\times1^2=25\pi-\pi=24\pi(㎠)$

현재 물의 깊이: $\frac{250\pi}{24\pi}=10\frac{5}{12}(㎝)$

10. ① $3^2\pi\times3+3^3\pi\times\frac{1}{3}=36\pi=113.04(㎤)$

② $3^2\pi\times6-3^3\pi\times\frac{1}{3}=45\pi=141.3(㎤)$

11. $(\frac{1}{2})^2\pi\times1\times\frac{1}{3}=\frac{\pi}{12}(㎗)$

ㄴ용기의 용적은

$1^3\times\pi\times\frac{4}{3}\div2=\frac{2\pi}{3}(㎗)$

$\frac{2\pi}{3}\div\frac{\pi}{12}=8$(번)

12. 먼저 제일 크게 원기둥을 만들 때 사용률이 78.5%라는것을 고려하고 다시 제일 큰 원뿔의 체적을 구합니다.

$$20\times\frac{\pi}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{15.7}{3}=5\frac{7}{30}(㎤)$$

재미나게 풀어보자요(2)

집　필　김형실
심　사　장정혁, 정은실, 오세옥
편　집　리봉정
편　성　정향애　　장　정 박철남
콤퓨터편성 장미　교　정 윤명심

낸　곳　금 성 청 년 출 판 사
인쇄소　평 양 종 합 인 쇄 공 장
인　쇄　주체101(2012)년 1월 10일
발　행　주체101(2012)년 1월 15일

ㄱ－171192ㄴ　　　　값 160원